

## DER PHYSIK UND CHEMIE.

## NEUE FOLGE. BAND XXII.

**I. Ueber ein neues Verfahren zur Bestimmung  
der Dampfdichte niedrig siedender Körper;  
von Nik. von Klobukow.**

Stud. chem. an der technischen Hochschule zu München.

(Hierzu Taf. VI Fig. 1–10.)

Im Laufe der letzten Jahre wurden, wie bekannt, zahlreiche Verfahren zur Bestimmung der Dampfdichte angegeben, welcher Umstand an und für sich hinreichend zeigt, dass diese, für den Chemiker so wichtige Operation sich allgemein in den chemischen Laboratorien Eingang verschafft. Andererseits aber beweisen die immer von neuem erscheinende Vorschläge, dass die bisherigen Verfahren nicht ausreichen, dass wir in der Bestimmung der Dampfdichte keine so gründlich ausgearbeitete Manipulation besitzen, wie z. B. die Elementaranalyse der organischen Körper.

Bekanntlich gründen sich sämtliche Verfahren zur Dampfdichtebestimmung auf directem Wege auf den drei Principien:

1) Princip der directen Wägung eines bestimmten Dampfvolomens: angegeben von Dumas.

2) Princip der Volumbestimmung des Dampfes aus der Menge der von ihm verdrängten Sperrflüssigkeit: angegeben von A. W. Hoffmann und allgemein als „sogenanntes „Verdrängungs“- oder „Deplacirungs“-Verfahren bekannt.<sup>1)</sup> Hierzu lässt sich auch die zuerst von L. Pfaundler und dann von V. Meyer eingeführte Me-

1) Dieses Princip wird sehr häufig, aus mir unbekannten Gründen, auch das „V. Meyer'sche Princip“ genannt und als ein von ihm herührendes angenommen.

thode der Anwendung von Luft (oder anderer Gase) als Sperrflüssigkeit anreihen,

3) Princip der Bestimmung der Dampfdichte „in Vacuo“: angegeben von A. W. Hoffmann. — Nach dem ersten und dritten Princip wurden, seit ihrer Angabe, zahlreiche Methoden ausgearbeitet, unter welchen ich nur auf die wichtigsten hinweisen will. So z. B. die Verfahren von H. Wichelhaus<sup>1)</sup>, Muir und Suguira<sup>2)</sup>, Pettersson und Eckstrand<sup>3)</sup>, Bell und Teed<sup>4)</sup>, Engler<sup>5)</sup>, Roscoe<sup>6)</sup>, Brühl<sup>7)</sup> u. s. w.

Viel weniger kann dies von dem zweiten Princip behauptet werden, dafür zeigt sich hier eine schrittweise Verbesserung der ursprünglich angegebenen Methode in Bezug auf Genauigkeit und Einfachheit der Ausführung. Ein Blick auf die Methoden von V. Meyer für hohe und niedrige Temperaturen<sup>8)</sup> im Vergleiche mit denen von Frerichs<sup>9)</sup> und Watts<sup>10)</sup>, die in früheren Jahren angegeben wurden, wird dies genügend beweisen.<sup>11)</sup> Gerade umgekehrt verhält es sich aber bei den Methoden nach dem ersten und dritten Principe; man kann hier aufs deutlichste die interessante Thatsache beobachten, dass beinahe jede auf Vereinfachung der ursprünglichen Methoden zielende Modification ihr im bezug auf Genauigkeit und Präcision nachsteht. So z. B., um eine der letztangegebenen Methoden zu erwähnen,

1) H. Wichelhaus, Chem. Ber. 3. p. 166. 1870.

2) Muir und Suguira, l. c. 10. p. 1598. 1877.

3) Pettersson und Eckstrand, l. c. 13. p. 1185. 1880.

4) Bell und Teed, l. c. 13. p. 2007. 1880.

5) Engler, l. c. 9. p. 1419. 1876.

6) Roscoe, l. c. 11. p. 1196. 1878.

7) Brühl, l. c. 9. p. 1368. 1876.

8) V. Meyer, Chem. Ber. 9. p. 1216. 1876 und 10. p. 2068. 1877.

9) Frerichs, Lieb. Ann. 185. p. 199. 1877.

10) Watts, Laboratory 1. p. 225. 1877; Zeitschr. f. anal. Chem. 7. p. 82. 1868.

11) Dabei schliesse ich die Luftverdrängungsmethode von V. Meyer als eine nicht wissenschaftlich genaue aus der Betrachtung aus und verweise nur auf die Verfahren mit Anwendung von Quecksilber und des Wood'schen Metalles als Sperrflüssigkeiten.

die Abänderung des Dumas'schen Apparates von Pawlewski<sup>1)</sup>, durch welche in dieses musterhafte Verfahren eine Masse von Fehlerquellen eingeführt werden, und trotzdem die Ausführung dieser Methode kaum erleichtert wird.

Daher waren auch bis jetzt die ursprüngliche Dumas-Deville-Troost'sche und die Gay-Lussac-Hoffmann's die einzigen praktisch in den Laboratorien angewendeten Methoden.

Und in der That: ist das Endziel einer Dampfdichtebestimmung nur die Lösung der Frage über die Moleculargrösse einer chemischen Verbindung, so genügt offenbar:

a) für niedrige Temperaturen das einfachste der denkbaren „Vergleichungsverfahren“ von Landolt<sup>2)</sup>, oder die ihm ähnlichen von Pfaundler<sup>3)</sup> (nach Grabowski);

b) für hohe Temperaturen, das für solche Bestimmungen hinreichend genaue Verfahren der Luftverdrängung von V. Meyer<sup>4)</sup> anzuwenden.

Will man dagegen die Bestimmung der Dampfdichte für präzise wissenschaftliche Zwecke, also z. B. zum Studium der Dissociationserscheinungen und der damit verbundenen abnormen Dampfdichten, zur Constatirung der chemischen Reinheit einer Substanz u. s. w. anwenden, so gebraucht man natürlich nicht die leichter ausführbaren, sondern die genaueste von den existirenden Methoden. Deshalb ist jeder neue Vorschlag dann und nur dann berechtigt, wenn er eine Vereinfachung einer genauen aber schwierig auszuführenden Methode bezweckt, wobei die Genauigkeit nicht im geringsten beeinflusst wird; damit habe ich aber auch die Grundidee ausgesprochen, von welcher sich bei der Angabe meines Apparates, der auf dem „Verdrängungsprincipe“ beruht, ausgegangen bin, und ich kann nunmehr zur Beschreibung meines Verfahrens übergehen.

1) Pawlewski, Chem. Ber. 16. p. 1293. 1883.

2) Landolt, Chem. Ber. 5. p. 497. 1872.

3) Pfaundler, l. c. 5. p. 575. 1872.

4) V. Meyer, Chem. Ber. 11. p. 1867 u. 2253. 1878.

Ueber das Princip des Apparates kann ich mich sehr kurz fassen: es entspricht vollkommen dem eines Dilatometers oder sogenannten „Gewichtsthermometers“, wie es bis jetzt zur Bestimmung der Ausdehnungscoefficienten angewendet wurde. Dieses Dilatometer besitzt eine ähnliche Form wie die in Fig. 1 abgebildete. Denken wir uns, es seien die Gewichte des Quecksilbers, welches der Apparat bei verschiedenen constanten Temperaturen  $t^0$ ,  $t^0$ ,  $t''^0$  (sagen wir sogleich bei den Temperaturen der zu verwendenden Heizflüssigkeiten) fasst, so sind daraus offenbar auch die Volumen des Apparates bei den genannten Temperaturen bestimmt. Füllen wir dann unseren Apparat bei  $t^0$  mit Quecksilber und bringen gleichzeitig eine abgewogene Menge einer bei  $t^0$  verdampfenden Substanz hinein; erhitzen wir ferner den Apparat bis auf diese Temperatur  $t^0$ , so wird, infolge der Ausdehnung des Quecksilbers einerseits und der Dampfbildung andererseits, eine bestimmte Quantität  $Q$  des Quecksilbers herausfließen, welches wir wägen. Diese zwei Wägungen geben uns aber unmittelbar das Volumen des Dampfes, denn wir kennen das Volum  $V_t$  des Apparates bei  $t^0$ ; kennen das Gewicht  $G_t$  des Quecksilbers bei  $t^0$ , mit welchem wir anfangen; wissen also, dass im Apparate bei  $t^0$  die Menge  $G_t - Q$  zurückgeblieben ist, welche einem Volumen  $V_q$  entspricht, folglich ist  $V_t - V_q = V_d =$  dem gesuchten Volumen des Dampfes.

Denken wir uns endlich, dass das gemessene Dampfvolumen sich unter dem während der Bestimmung herrschenden Barometerdrucke befindet, was durch eine später zu beschreibende Einrichtung erreicht wird, so geben uns die oben genannten zwei Wägungen und die Ablesung des Barometers alle Daten zur Bestimmung der Dampfdichte. Die Art und Weise, wie dies einfache Princip mittelst eines Apparates den ich, seinem Zwecke und seiner Gestalt entsprechend, als „Dampfdichtedilatometer“ benennen will, realisiert wurde, ist aus der Figur 2 und Folgenden zu ersehen. Die Figuren 2<sub>a</sub> und 2<sub>b</sub> stellen uns die Seiten- und vordere Ansicht des in  $\frac{1}{2}$  der wahren Grösse abgebildeten Apparates dar. Ein cylindrisches, dünn-



wandiges ( $\frac{1}{2}$  mm Wandstärke) Glasgefäß *a* von ca. 45—50 ccm Inhalt ist oben verschlossen und geht unten in eine bis zur horizontalen Lage gebogene Röhre *b* (1 mm Wandstärke) über. Diese ist in der Hülse *h* des Stahlverschlusses *v* eingekittet. Ihre Fortsetzung bildet die capillare Röhre *c* ( $\frac{1}{2}$  mm im innern Durchmesser), deren oberes Ende horizontal gebogen und bei *m* glatt abgeschliffen ist. Der Verschluss *v*, dessen Durchschnitt nach der Axe *nn* in den Fig. 2, und Fig. 3 detaillirt abgebildet ist, besteht im wesentlichen aus drei Haupttheilen:

1) der schon erwähnten Hülse *h*, welche mit einem Vorsprunge *r* und einem Schraubengewinde versehen ist; 2) der Schraubenmutter *s*, welche das Verschliessen des Apparates besorgt; 3) dem mit der Capillaren *c* fest verbundenen und in der Schraubenmutter um die Axe *nn* drehbaren vorderen Theile, in welchem sich zwei Bohrungen befinden, von denen die eine längs der Axe *nn* verläuft und mit der Capillaren *c* direct communicirt, die andere zur ersten unter einem Winkel von  $45^\circ$  geneigt ist. Diese drei Haupttheile sind in der Fig. 3, behufs Deutlichkeit durch eigene Schraffirung angedeutet; daselbst sind die Bohrungen mittelst starker, schwarzer Linien gekennzeichnet.

Der konische Vorsprung *l* des Bolzens *f* gleitet in einer entsprechenden konischen Rinne der Schraubenmutter *s* und wird durch eine Ringfeder *w* an diese letztere fest angedrückt, wobei die Federkraft nach Belieben regulirt werden kann, was durch das Anziehen der kleinen Schraubenmutter *p* mittelst eines Schlüssels (siehe Fig. 4) bewerkstelligt wird. Der Bolzen *f*, welcher sich, wie auf den Figuren zu sehen, ziemlich weit in die Glasröhre *b* cylindrisch verlängert, ist selbstverständlich mit dem beweglichen vorderen Theile des Verschlusses fest verbunden, was durch eine Gegenmutter *i* mit quadratischem Einschnitte in leicht zu begreifender Weise bewerkstelligt wird. Durch die beschriebene Einrichtung des Stahlverschlusses, auf deren weitere Einzelheiten ich vorläufig nicht näher eingehen will, ist uns offenbar das Mittel in die Hand gegeben: durch Drehung des beweglichen vorderen Theiles des Apparates die capillare Röhre *c* in

eine solche Lage zu bringen, dass die Druckverhältnisse innerhalb und ausserhalb des Apparates ausgeglichen werden, ohne dabei das Volumen des ganzen Apparates zu ändern.

Die Bedingungen, bei welchen dieses Ausgleichen stattfindet, sind leicht zu ersehen: wären  $a$  und  $c$  zwei Röhren von gleichem Durchmesser, so müsste man das Niveau des Quecksilbers in beiden Röhren auf gleiche Höhe bringen; ist das aber nicht der Fall, und haben wir es, wie im Dampf-dilatometer, mit einer weiten und einer capillaren Röhre zu thun, so muss durch genaue Messung ein und für alle mal der Einfluss der Capillardepression in  $c$  festgestellt werden.

Diese Grösse muss, da sie in demselben Sinne wie der äussere Barometerdruck bei  $m$  wirkt, zu der beobachteten Barometerhöhe addirt werden. Um etwaige Zweifel über den zuverlässigen Verschluss zu beseitigen, sei bemerkt, dass bei physikalischen Arbeiten eine Reihe von Apparaten angewendet werden, welche sogar für Gase wie Wasserstoff dicht sind; ausserdem muss dieser Verschluss ja nur quecksilberdicht sein. Dieses wird schon durch die capillar-depressiven Kräfte zwischen zwei auf  $\frac{1}{8} - \frac{1}{7}$  mm voneinander entfernte Eisenstücke erreicht, zudem arbeitet der Apparat nur unter gewöhnlichem Drucke. Ungeachtet dessen wurde mein Apparat, dessen sorgfältige und elegante Ausführung ich dem Geschieke des Hrn. Wiedemann<sup>1)</sup> zu verdanken habe, unter der Bedingung hergestellt, dass er bei einem Drucke von 2,5 Atmosphären quecksilberdicht sei, was auch in leichter Weise geschehen ist.

Was die Verkittung der Glas- und Metalltheile des Apparates anlangt, so will ich auch darüber einiges sagen. Die Theile der Röhren  $b$  und  $c$ , soweit sie in den Stahlverschluss eingekittet sind, werden mit Flusssäure geätzt, die geätzten Stellen mit Wasserglas bestrichen und, nachdem sie ausgetrocknet, mittelst einer Mischung von Bleiglätte mit Glycerin (in der Praxis oft unter dem Namen

1) Physikalisch-mechanisches Institut in München.

„Silberkitt“ bekannt) von der Consistenz eines dicken Breies, in die betreffenden Theile des Verschlusses eingekittet. Dieses Kittmittel, welches besonders für Apparate, welche bei hohen Temperaturen arbeiten sollen, empfohlen wurde, hat sich bei dem Gebrauche meines Apparates vorzüglich bewährt, da es ausserdem durch die angewendeten Heizflüssigkeiten in keiner Weise angegriffen wird. Andere gute Kittungsmittel, wie z. B. Schwefel mit Bimsstein, Wasserglas mit Kreide, Wasserglas mit Gyps u. dergl. mehr, sind, theils infolge ihrer Sprödigkeit, theils wegen ihrer Angreifbarkeit durch die Heizflüssigkeiten, für unseren Zweck nicht zu empfehlen. Es erübrigt noch, bei der Besprechung der mechanischen Details am Apparate, das Schmiermittel zu erwähnen, dessen ich mich mit grossem Erfolge bediente, um die gleitende Oberfläche des Bolzens *f*, sowie die Oberfläche des Schraubengewindes der Hülse *h* damit zu versehen. Als solches Schmiermittel gebrauchte ich fein pulverisirten weichen Graphit; es genügt, auf die mit Weingeist oder Metalllack befeuchtete Oberfläche, mittelst eines Pinsels, etwas Graphitpulver aufzutragen, und die bestrichene Stelle austrocknen zu lassen. Das so aufgetragene Graphitpulver haftet, besonders an den sich reibenden Stellen, ungemein fest und verleiht ihnen einen eigenthümlichen Glanz und Politur; ausserdem hat sich aus directen Versuchen ergeben, dass zwischen solchen Oberflächen die capillardepressiven Kräfte noch grösser als wie beim gewöhnlichen Eisen sind.

Der Beschreibung des Apparates reihe ich die Operation der Füllung desselben mit Quecksilber unmittelbar an. Der auseinandergeschraubte Apparat wird durch die Oeffnung der Röhre *b* mit trockenem Quecksilber gefüllt, wobei, behufs der Entfernung der an den Wänden haftenden Luftblasen, die bekannte Durchführung einer kleinen Luftblase durch die ganze Oberfläche des Quecksilbers vorgenommen wird, wobei selbstverständlich die Oeffnung der Röhre *b* verschlossen sein muss. Alsdann legt man den Apparat so, dass das Gefäss *a* horizontal, die Röhre *b* vertical liegt, und schreitet zur zweiten Operation, der Verschraubung der Verschlusses. Der zuerst in die Röhre *b*

hereindringende cylindrische Theil *o* des Bolzens *f* drückt auf das darin befindliche Quecksilber und bringt eine gewisse Menge desselben zum Ausfliessen; das dauert aber nur so lange, bis die Schraubenmutter in das Schraubengewinde eingegriffen hat: es fliesst weiter, infolge der Capillardepression zwischen den Schraubengewinden, kein Quecksilber aus, sondern das weitere Anziehen der Schraubenmutter treibt das Quecksilber durch die Bohrungen des Verschlusses weiter, bis es zum Ausfliessen bei der Mündung *m* der Capillaren *c* gelangt. Dabei wird selbstverständlich durch das hinaufsteigende Quecksilber zuerst sämmtliche Luft aus den damit gefüllten inneren Theilen des Verschlusses vertrieben, und so gelingt es, den Apparat vollständig mit Quecksilber zu füllen.

Aber nicht nur diesen Zweck verfolgte die Construction des Verschlusses; es beginnt nämlich das Ausfliessen des Quecksilbers aus der Mündung der Capillare *c* noch weit bevor die Schraubenmutter vollständig angezogen ist<sup>1)</sup>, und darin ist uns offenbar das Mittel in die Hand gegeben, einige Gramm Quecksilber vorrätbig zu halten, was, wie wir sehen werden, von grosser Wichtigkeit ist.

Zur Bequemlichkeit des Hin- und Hertragens des Apparates, namentlich aber für einige kathetometrische Messungen, die man an demselben vornehmen muss, kommt er auf ein Specieell zu diesem Zwecke eingerichtetes Gestell, welches in Fig. 6 abgebildet und wohl keiner weiteren Beschreibung bedarf; zu erwähnen ist nur, dass man das Gestell auch auf die Seite *mno* legen kann, wobei also der Apparat horizontal zu liegen kommt, wie das z. B. bei der Füllung mit Quecksilber nothwendig ist. Ein Gummiband *g* dient zur Befestigung des cylindrischen Gefässes *a* des Apparates an das Tragegestell.

Dem Heizgefässe musste ich eine von den bisher gebräuchten Einrichtungen dieser Art abweichende Form geben.

<sup>1)</sup> Diesen Zustand will ich in der Folge mit dem Ausdruck „halb verschraubt“ bezeichnen.

Der bewegliche Theil des Verschlusses, musste, behufs der oben erwähnten Einstellung der capillaren Röhre *c*, ausserhalb des Heizgefässes sich befinden, wobei ich nicht vergessen will, voranzuschicken, dass bei der Einstellung der Capillaren, welche weiter unten ausführlich beschrieben wird, wir das Gefäss *a* gar nicht zu sehen brauchen.

Die Fig. 8, 9—10 mögen die Einrichtung des Heizgefässes ersehen lassen. Das aus starkem Messingblech hergestellte cylindrische Gefäss ist oben mit einem starken breiten Rande *oo*, dem ein ebensolcher *kk* des Deckels *m* entspricht, und zwischen welchen (Rändern) ein Dichtungsring *g* aus geeignetem Material (z. B. Leder, Gummi, Carton u. s. w.) zu liegen kommt. Unten geht das Gefäss in ein schmäleres *sqrt*, von ca. 200 ccm Inhalt über, welches vollständig mit der Heizflüssigkeit gefüllt und durch directe Feuerung von unten erhitzt wird. Die einzige Oeffnung des Gefässes *vv* dient dazu, die Hülse *h* des Apparates durchzulassen, ist aber, wie zu sehen, breiter als diese letztere, was zum leichten Einbringen des Apparates von Bedeutung ist. Der gewölbte Deckel des Gefässes ist mit drei auf einer Richtung liegenden Oeffnungen *f*, *y*, *j* versehen, von denen die mittlere *f* zur Verbindung mit dem Kühler *k*, die beiden Seitenöffnungen *j* und *y* zum Einbringen der Thermometer *TT* dienen.

Auf dem Boden des breiten Theiles des Heizgefässes, liegt ein kleines Drahtgestell *LPR*, welches auf der Fig. 9 eigens abgebildet ist und auf welchem mittelst des Korkes *Q* der ganze Apparat zu liegen kommt, sodass er in der Oeffnung *vv* durchaus nicht eingehengt ist, und sie ihm nicht als Stütze dient. Der Verschluss der Oeffnung *vv* wird dadurch hergestellt, dass der breite Rand der Hülse *h* sich an die inneren Wandungen des Gefässes anlegt; auf dem aus der Oeffnung hervorragenden Theile dieser Hülse befindet sich ein Dichtungsring *w* von geeignetem Material und von solcher Dicke, dass, nachdem der Verschluss „vollständig“ verschraubt, die Schraubenmutter den genannten Dichtungsring fest an die Ränder der Oeffnung *vv* andrückt. Als Dichtungsring sind am besten, für beinahe jede Heiz-

flüssigkeit, mehrere aufeinander liegende Papierringe, denen sich von der Seite der Schraubenmutter ein solcher von Eisenblech anreihet. Specieell für Wasser als Heizflüssigkeit ist jedoch ein Gummiring zu empfehlen. Ein kleiner Einschnitt  $d$  in dem Rande der Hülse  $h$ , dem ein an die Wand des Gefässes angelötheter Stift  $d'$  entspricht, sorgt dafür, dass der Apparat auf keiner Weise aus seiner verticalen Lage kommt. Nachdem der Apparat in angedeuteter Weise in das Heizgefäss eingebracht ist, stellt man über ihn einen Mantel  $\alpha\beta\gamma\delta$  mit konischem Deckel, welcher unten Einschnitte für die Hülse  $h$ , sowie für die Drähte des Gestelles  $LPR$  besitzt; ebenso sind im Deckel des Mantels Oeffnungen  $y'$  und  $j'$  für die Thermometer, entsprechend den Oeffnungen  $y$  und  $j$  des Deckels  $m$ . Endlich befindet sich auf dem Deckel des Mantels eine Rinne  $DD$  angelöthet, durch welche die vom Kühler zurückkehrende Heizflüssigkeit beinahe bis zum Boden des Gefässes abfließt.

$xx$  ist eine runde, mit einem Ausschnitte versehene Platte aus starkem Eisenblech, die auf den Ring des das Heizgefäss tragenden Stativs aufgelegt ist und auf welche das letztere zu stehen kommt.  $iii.$  sind Klemmschrauben, deren Zahl vier bis sechs ist, und mittelst welcher die Dichtung des Deckels bewerkstelligt wird.

Was die Fläschchen anlangt, worin ich die abgewogene Menge der zu untersuchenden Substanz in den Apparat brachte, so beabsichtigte ich zuerst, ähnlich wie es Hr. V. Meyer machte, gekrümmter Fläschchen mich zu bedienen. Allein durch directe Versuche, die der Hr. Glasfabrikant J. Greiner, welcher die Glastheile für meinen Apparat anfertigte, in gefälliger Weise für mich angestellt, hat es sich erwiesen, dass solche Fläschchen gern in der Biegung des Apparates stecken bleiben; infolge dessen gaben wir den Fläschchen die Form der Fig. 5. Ein solches Fläschchen darf so dick sein, dass es dem inneren Durchmesser der Krümmung entspricht, ohne dass es beim Durchgang irgend ein Hinderniss findet.

Zur Ermittlung der Grösse solch eines Fläschchens beschreibt man mit dem Radius der mittleren Krümmung



bei  $b$  zwei Bögen:  $p m o$  und  $p n o$ , deren weiteste Entfernung  $= m n =$  dem inneren Durchmesser der Röhre  $b$  ist.

Ich bediente mich bei meinen Versuchen stets eines und desselben Fläschchens (etwa 2,7 g Quecksilber bei gewöhnlicher Temperatur fassend); wurde dasselbe durch die Substanz nicht völlig gefüllt, so geschah dieses durch Hineinbringen einer entsprechenden Menge von Quecksilber, welches Verfahren, wie bekannt, schon von verschiedenen Forschern gebraucht wurde. Der Grund dafür ist einfach der, dass bei sämtlichen Bestimmungen der Constanten für den Apparat, das Fläschchen denselben stets begleitet, wodurch die sonst in der Rechnung vorzunehmende, unerquickliche Correction für das Fläschchen wegfällt. Selbstverständlich ist man aber an die Erfüllung dieser Bedingung nicht gezwungen und kann beliebige Fläschchen, Eimerchen etc. anwenden, ja sogar die Substanz, falls sie fest ist, in Stückchen einführen, wobei jedoch jedesmal eine Correction unentbehrlich ist.<sup>1)</sup>

Ich wende mich nunmehr zur Beschreibung der einzelnen Manipulationen mit dem Apparate und zunächst zur:

#### Bestimmung der Constanten für den Apparat.

1. Bestimmung der Capillardepression  $\delta$ , für verschiedene Temperaturen. — Diese Operation ist die erste, welche am Apparate vorgenommen werden soll, und die einzige, bei welcher wir es mit Höhenmessungen zu thun haben. Zum Zwecke dieser Messung wird der Ballon  $a$  oben bei  $t$  (siehe Fig. 2<sub>a</sub> und Fig. 2<sub>b</sub>) mit einer kleinen capillaren Röhre versehen, welche später, nach Vollendung der Operation, zugeschmolzen wird. Man verschliesst diese Capillare mit einem Gummistöpsel, füllt den Apparat, wie oben angegeben, mit Quecksilber, befestigt ihn auf dem Tragegestelle, wie auf Fig. 6 zu sehen ist, und stellt ihn nun auf den Mess-

1) Das physikalisch-mechanische Institut von Böhm u. Wiedemann in München hat die Anfertigung und Lieferung meines „Dampfdichtedilatometers“ nebst allen dazu gehörigen Theilen: wie Tragegestell, Heizgefäß, Fläschchen etc. übernommen, wobei die dazu gehörigen Glastheile in der „Fabrik für Präcisionsglasinstrumente“ von J. Greiner in München hergestellt werden.

tisch vor das Kathetometer. Nachdem man sich überzeugt hat, dass der Apparat fest und senkrecht steht, lüftet man den Gummistöpsel und lässt das Quecksilber aus der Mündung der Capillaren (welche irgend wie, also z. B. senkrecht steht) frei herausfliessen.

Ist dies Herausfliessen vollendet, so wird die Niveaudifferenz des Quecksilbers in *a* und *c* gemessen. Zur Controle wiederholt man das Verfahren einige mal und bei verschiedenen Stellungen der Röhre *c*, wobei natürlich gleiche Zahlen sich ergeben müssen. So kann man z. B., indem man die Capillare *c* im Anfange senkrecht eingestellt hatte, durch allmähliches Neigen derselben immer eine weitere Portion des Quecksilbers zum Herausfliessen bringen und 10 bis 15 Messungen rasch hintereinander ausführen, bis endlich das Niveau des Quecksilbers im Gefässe *a* das untere Ende des cylindrischen Theiles erreicht hat. So geschieht die Messung der Capillardepression bei gewöhnlicher Temperatur; von grösserer Bedeutung ist die Messung bei höheren Temperaturen, welche in folgender einfachen Weise bewerkstelligt wird. Der Apparat kommt in ein Sandbad, welches sich in einem von Blech hergestellten Kasten befindet, dessen Dimensionen und Form nahezu denen des unteren Theiles des Heizgefässes entsprechen, dessen Höhe jedoch nur halb so hoch wie die des letzteren ist, sodass etwa ein Dritteltheil des cylindrischen Gefässes *a* aus den Rändern des Sandbades hervorragt. Der Apparat wird, wie früher angegeben, gefüllt (wobei die Capillare bei *t* mittelst eines Gummistöpsels verschlossen), in das Sandbad hineingebracht, letzteres bis zum Rand mit Sand gefüllt und der aus dem Sandbade hervorragende Theil des Glasballons *a* mit Filz umgeben. Das so montirte Sandbad kommt auf die Eisenplatte *xx* (siehe Fig. 8 und Fig. 10) und wird nun allmählich bis 200° erhitzt. Ist diese Temperatur erreicht, und zeigt das Thermometer in den oberen und unteren Sandschichten gleiche Temperatur, so entfernt man den Filz, öffnet die Capillare bei *t*, lässt das Quecksilber frei aus der Mündung der Röhre *c* herausfliessen u. s. w., kurzum man macht die Messung genau so wie die früher beschriebene, mit dem Unterschiede, dass

wir nicht so viele Messungen hintereinander ausführen können, da nur, wie gesagt, ein Dritttheil des Gefässes *a* sichtbar, resp. der Messung zugänglich ist. Während der Abkühlung des Sandbades, welche, wie bekannt, nur höchst langsam vor sich geht, können noch beliebig viele Messungen für Zwischen-temperaturen angestellt werden, wobei von Zeit zu Zeit das herausfliessende Quecksilber durch Zugiessen eines solchen durch die Capillare bei *t* ersetzt wird. Dass die dabei erhaltenen Zahlen nicht bedeutend voneinander differiren, ist vorauszusehen. Ich führe als Beispiel die Werthe von  $\delta_t$  für den Apparat, mit welchen ich gearbeitet habe, an:

Temperatur	Capillardepression
$t = \text{gew. Temp.} = 17-20^\circ \text{C.}$	$\delta_t = 8,35 \text{ mm}$
$t = 100^\circ \text{C.}$ . . . . .	$\delta_t = 8,91 \text{ „}$
$t = 150 \text{ „}$ . . . . .	$\delta_t = 9,25 \text{ „}$
$t = 200 \text{ „}$ . . . . .	$\delta_t = 9,36 \text{ „}$

Da die Einrichtung des Sandbades uns ermöglicht, die Messung bei genau denselben Bedingungen vorzunehmen, wie wenn der Apparat sich im Dampfe einer Heizflüssigkeit befände, so können die gewonnenen Zahlen auf eine höchste Genauigkeit Anspruch machen, was durch Berechnung aus den für diesen Zweck existirenden Formeln niemals erreicht werden könnte. Was die Ablesung der Niveaus betrifft, so ist man berechtigt, in der Röhre *a* den oberen Theil des Meniscus, in der Röhre *c* den mittleren Theil desselben abzulesen.

Bei dieser Gelegenheit möchte ich nicht unterlassen, auf einen Umstand hinzuweisen, durch den man leicht irre geführt werden kann; es kommt nämlich der Fall vor, dass der Quecksilberfaden in der Capillare, nach Beendigung des Ausfliessens, nicht unmittelbar an der Mündung *m* derselben abbricht, sondern in einiger Entfernung von derselben sich einstellt, sodass man glauben kann, es sei zu viel herausgeflossen. Allein der Versuch wird, bei denselben Bedingungen, immer dasselbe zeigen, weil diese Abnormität, als Folge der zu grossen Capillardepression im Schnabel der Capil-

laren, falls die Oeffnung derselben zu eng ist, stets stattfindet. Mit der Bestimmung der Capillardepression wird zugleich eine weitere Operation vorgenommen, nämlich die:

2. Anfertigung einer Tabelle, mittelst welcher man nach der Menge des aus dem Apparate herausgeflossenen Quecksilbers direct die entsprechende Einstellung der Capillaren in die „Normale Lage“ ablesen kann, welche Einstellung mit Hülfe eines getheilten Kreisbogens bewerkstelligt wird. Unter „Normaler Lage“ der Capillarenröhre  $c$  für eine gewisse Temperatur  $t^0$  versteht man diejenige, bei welcher das Niveau des Quecksilbers in  $a$  und  $c$  auf gleicher Höhe sich befindet; haben wir unsere Capillare in diese Lage gebracht, so bleibt uns nur bei der Ausführung der Berechnung zu der während des Versuches gemessenen Barometerhöhe die der Temperatur  $t^0$  entsprechende Capillardepression  $\delta_t$  zu addiren, von dieser Summe die der Temperatur  $t^0$  entsprechende Spannkraft des Quecksilberdampfes  $\sigma_t$  zu subtrahiren, um den Druck zu ermitteln, unter welchem sich das betreffende Dampfvolumen befindet.

Die Herstellung der genannten empirischen Tabelle geschieht am zweckmässigsten in folgender Weise. An die Capillare bei  $t$  wird ein kleiner Gummischlauch mit Quetschhahn angebracht, der Apparat mit Quecksilber gefüllt und vor dem Kathetometer aufgestellt, dabei die Capillare  $c$  in die senkrechte Stellung gebracht und unter der Mündung  $m$  derselben ein graduirter Messcylinder angebracht, der zur Aufnahme des herausfliessenden Quecksilbers dient.

Man öffnet alsdann den Quetschhahn und bringt, durch Hineinblasen mittelst des Schlauches, eine beliebige Portion des Quecksilbers zum Ausfliessen, wonach der Quetschhahn wieder geschlossen wird. Wir haben so denselben Fall, als ob eine gewisse Menge von Dampf sich im Apparate gebildet hätte und infolge dessen eine bestimmte Quantität von Quecksilber verdrängt wurde; diese Menge notiren wir uns und bringen alsdann<sup>1)</sup> durch Drehung die Capillare in die „Normale Lage“, wobei noch Quecksilber ausfliesst, welches

1) Mit Zuhülfenahme des Kathetometers.

in demselben Messcylinder aufgefangen wird. Nun beobachtet man auf einem beliebig eingetheilten Halbkreise, der hinter der Capillare angebracht wird, den Theilstrich, welcher der Lage der Capillare entspricht, und notirt sich diese Beobachtung neben der erstgenannten. Alsdann beginnt das Spiel von neuem: man bringt die Capillare wieder in die senkrechte Lage, bringt durch Einblasen von Luft eine weitere Portion von Quecksilber zum Ausfliessen u. s. w. Es genügen fünf bis zehn solche Beobachtungen, um durch Interpolation beliebig viele Zahlen für die Tabelle zu gewinnen. Wir erhalten dadurch etwa folgende Tabelle:

Cubikcentimeter des bei senkrechter Stellung der Capillaren heraus- geflossenen Quecksilbers: (Folgen Zahlen)	Stelle die Capillare auf den und den Theilstrich, um sie in die „Normale Lage“ zu bringen: (Folgen Zahlen)
---------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------	------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------

Selbstverständlich kann nach dieser Tabelle die Einstellung der Capillaren mit dem höchsten Grade der Genauigkeit ausgeführt werden — ebenso als wenn wir das Gefäss *a* vor unseren Augen hätten. Ausserdem gibt das Auffangen des Quecksilbers in einen graduirten Cylinder ein bequemes Mittel, um uns zu überzeugen, ob sich im Apparate, dessen Volumen wir kennen, die zulässige Menge von Dampf gebildet oder diese Grenze überschritten, was dann der Fall ist, wenn das Niveau des Quecksilbers sich schon in der Krümmung der Röhre *b* befindet.

3. Bestimmung des Gewichtes des Quecksilbers im Apparate bei verschiedenen constanten Temperaturen. — Als solche constante Temperaturen gelten, wie schon oben erwähnt wurde, die der anzuwendenden Heizflüssigkeiten, zu ihnen gesellt sich ausserdem eine weitere, der Nullpunkt, bei welchem ebenfalls das Gewicht des Quecksilbers im Apparate bestimmt werden soll. Die Füllung des Apparates bei 0° geschieht in der einfachen Weise, dass man den mit abgekühltem, trockenem Quecksilber gefüllten Apparat, in welchem das ebenfalls mit Quecksilber gefüllte Fläschchen sich befindet, „halbverschraubt“ im zerstossenen Eise ca. eine Stunde stehen lässt; alsdann wird

der Apparat im Eise selbst „vollständig“ verschraubt, rasch herausgenommen, über einem Gefässe von grösseren Dimensionen entleert und das Quecksilber auf einer grösseren chemischen Wage bis auf Centigramme genau gewogen. Was die Bestimmung der Gewichte des Quecksilbers bei allen übrigen Temperaturen anbelangt, so geschehen sie alle nach demselben Schema wie die eigentliche Bestimmung der Dampfdichte, d. h. der mit Quecksilber gefüllte Apparat wird in das Heizgefäss nach den angedeuteten Regeln hineingebracht und bis zur constanten Temperatur im Dampfe der Heizflüssigkeit erhitzt, wobei infolge der Erwärmung ein Theil des Quecksilbers aus der Capillare *c* ausfliesst. Nun lässt man alles langsam erkalten, entleert den Apparat wie früher und wägt das (in ihm zurückgebliebene) Quecksilber bis auf Centigramme genau. Bei sämtlichen Füllungen des Apparates mit Quecksilber ist darauf zu achten, dass dasselbe vollkommen von Luft befreit sei. Um das zu erreichen, bediente ich mich stets folgenden Verfahrens.

Man bringt in den Apparat soviel trockenes Quecksilber, dass das Gefäss *a* bis zur Krümmung der Röhre *b* damit gefüllt ist, alsdann wird der Apparat in einem Sandbade bis auf 200° erhitzt, wobei nur der mit Quecksilber gefüllte Theil in Sand zu stehen kommt, die Röhre *b* dagegen aus demselben hervorragt. Nach einstündigem Erhitzen bringt man das Sandbad mit Apparat noch heiss unter die Luftpumpe und lässt nach dem Auspumpen das Ganze bis zum Abkühlen darin stehen.<sup>1)</sup> Diese scheinbar mühsame Operation ist jedoch nicht genug zu empfehlen, denn sogar Spuren von Luft, welche bei gewöhnlicher Temperatur kaum zu bemerken sind, beeinträchtigen bei höheren und hohen Temperaturen die Resultate beträchtlich.

Ich bemerke hierbei, dass auch ein wirkliches Auskochen des Quecksilbers im Apparate, wobei letzterer, wie beschrieben, in das Sandbad zu stehen kommt, vorgenommen werden kann; allein das Austreiben der Luft ist nach dem beschriebenen Verfahren so vollständig, dass die Operation des

1) Dabei ist das Quecksilber so gut wie ausgekocht zu betrachten.



eigentlichen Auskochens entbehrlich wird. Bis jetzt bin ich stillschweigend über den Umstand hinweggegangen, dass beim Erhitzen nicht der ganze Apparat in den Dämpfen der Heizflüssigkeit sich befindet, sondern dass das im beweglichen Theile des Verschlusses enthaltene Quecksilber sich ausserhalb des Heizgefässes und bei einer unbestimmten Temperatur sich befindet. Dieser Umstand wäre allerdings als schwache Seite des sonst in allen Punkten streng genauen Verfahrens zu bezeichnen. Allein es ist leicht zu beweisen, dass dieser Zweifel völlig unbegründet ist. Bedenken wir, dass das Gewicht des Quecksilbers im erwähnten Theile nur etwa  $\frac{1}{200}$  des Gesamtgewichts des Quecksilbers im Apparate ausmacht; dass ausserdem von diesem geringen Theile beinahe die Hälfte (nämlich die Menge, welche sich innerhalb des Verschlusses befindet und durch Wärmefortpflanzung auf der Temperatur der Heizflüssigkeit erhalten wird), ausser Betracht fällt, so ist es wohl begreiflich, dass der Fehler so klein ist, dass er kaum auf die fünften Decimalen der Rechnung einen Einfluss haben kann.

Wie schon erwähnt, geschehen sämtliche Wägungen des Quecksilbers bis auf Centigramme genau und stets unabhängig vom Apparate in einem geeigneten Wägungsglase. Ich brauche nicht zu bemerken, dass die Correctionen der Thermometer und Gewichtssätze ebenfalls Gegenstand der vorbereitenden Arbeit ausmachen. Bezüglich der Zeit, die zur Ausführung dieser lange zu besprechenden, aber sehr einfachen Operationen erforderlich ist, bemerke ich aus eigener Erfahrung, dass sie im ganzen kaum 10—15 Arbeitsstunden überschreitet.

Beschreibung der Ausführung einer Dampfdichtebestimmung mit dem „Dampfdichtedilatometer“.

Diese Operation, welche, wie schon früher erwähnt, zwei Wägungen und einige Beobachtungen erforderlich macht und, inclusive aller Vorbereitungen, in der Zeit von 1—1½ Stunde bequem erledigt werden kann, geschieht in folgender Weise. Der Apparat wird nach den angegebenen Regeln mit Quecksilber, beinahe bis an die

Mündung der Hülse gefüllt; das Fläschchen mit der abgewogenen Menge Substanz in die Oeffnung hereingedrückt, letztere mit dem Finger verschlossen, wobei das überflüssige Quecksilber herausfließt. Durch geeignetes Neigen steigt dann des Fläschchen in den Ballon *a*; man entfernt den verschliessenden Finger, nachdem der Apparat wieder in die horizontale Lage gebracht, und überzeugt sich, ob mit dem Fläschchen keine Luftblase in das Quecksilber des Gefässes *a* mitgerissen wurde. Hierauf wird das auseinander genommene Heizgefäss horizontal, mit der Oeffnung *vv* nach oben, auf den Arbeitstisch gelegt; die eine Hand bringt den mit der Korkunterlage versehenen Apparat, in geeigneter Lage, in dasselbe hinein; mittelst der anderen Hand wird auf das hervorragende Ende der Hülse der Dichtungsring *w* angebracht, alsdann der Apparat „halb verschraubt“ und das Heizgefäss aufrecht auf seiner Unterlage *xx* hingestellt. So montirt, wird das ganze einige Zeit sich selbst überlassen, damit das Quecksilber im Apparate die Temperatur des Ortes, welche an einem in das Heizgefäss hineingehängten genauen Thermometer abgelesen wird, und welche ich als „Anfangstemperatur“  $\tau$  in der Folge bezeichnen will, annimmt. Durch Beobachtung des Quecksilberfadens in der capillaren Röhre *c* ist es leicht zu bestimmen, ob der Apparat die genannte Zimmertemperatur erreicht hat.<sup>1)</sup>

Alsdann wird der Apparat „vollständig“ verschraubt<sup>2)</sup> und die Capillare *c* in die senkrechte Stellung gebracht; alsdann bringt man unter die Mündung der letzteren eine unter dem Winkel von  $120^\circ$  gebrachte Röhre *S* (s. Fig. 10), mittelst welcher das aus dem Apparate ausfliessende Quecksilber in den graduirten Cylinder *G* fließt. Es wird dann der Mantel  $\alpha\beta\gamma\delta$  in geeignete Lage gebracht, der Deckel mit dem Dichtungsringe aufgesetzt und die Klemmschrauben angezogen. Durch die mittlere Oeffnung *f* des Deckels wird

1) Ich machte am liebsten die genannten Vorbereitungen am Schlusse des Tages, sodass, beim Beginne der Arbeiten am nächsten Tage, ich direct mit der nächst zu beschreibenden Operation anfangen konnte.

2) Die „vollständige“ Verschraubung erkennt man an der Lage eines kleinen Zeichens, welches auf der Schraubenmutter angebracht ist.

die abgemessene Menge der Heizflüssigkeit hineingegossen und dann diese Oeffnung, mittelst des Vorstosses  $V$ , mit dem Kühler  $K$  in Verbindung gebracht; endlich werden die Thermometer  $TT$  in den für sie bestimmten Oeffnungen befestigt, und es wird mit dem Erhitzen begonnen, gleichzeitig ein kleiner Schirm  $H$  zwischen dem Apparate und dem graduirten Cylinder hingestellt. Von jetzt bis zur vollständigen Vergasung der Substanz ist die Anwesenheit des Experimentators kaum nothwendig. Anfangs fliesst das Quecksilber tropfenweise aus der Mündung der Capillare  $C$  aus; ist der Siedepunkt der Substanz erreicht, so wird dies Herausfliessen ein lebhafteres, zuweilen in Form eines kleinen Strahles, endlich, wenn die Substanz verdampft, hört das Herausfliessen auf. — Nun umhüllt man das Heizgefäss mit einem Filzmantel, macht die Flamme möglichst gross und lässt die Heizflüssigkeit etwa 15 Minuten lang lebhaft sieden.<sup>1)</sup> Fliesst aus der Capillaren kein Quecksilber mehr aus, so ist die Dampfbildung vollendet; wir lesen am graduirten Cylinder das Volumen des herausgeflossenen Quecksilbers ab und suchen in unserer Tabelle die entsprechende Theilung der angefertigten Papierscheibe, auf welche man die Capillare einstellen muss, damit sie in die „Normale Lage“ kommt, wonach der Theilkreis angebracht wird und die Einstellung selbst geschieht. Man lässt den Apparat mit der neuen Stellung der Capillaren nicht länger als zehn Minuten stehen; das, bei der erwähnten Drehung der Capillaren, noch herausgeflossene Quecksilber wird wie früher in dem graduirten Cylinder aufgefangen und, nachdem es in ein geeignetes Gefäss übergegossen, bis auf Centigramme genau gewogen. Gleichzeitig wird bei der Einstellung der Capillaren in ihre letztere Lage der herrschende Barometerdruck abgelesen, sowie durch Ablesung der Thermometer<sup>2)</sup> im Dampfe constatirt, ob sich etwa die Temperatur des Dampfes der Heizflüssigkeit durch irgend eine Ursache geändert hat.

1) Bei den Arbeiten mit Anilin wurde auch der Deckel des Gefässes mit Filz bedeckt.

2) Das eine von ihnen befindet sich im oberen, das andere im unteren Theile des mit Dampf erfüllten Raumes des Heizgefässes.

Damit sind alle Beobachtungen für die Bestimmung der Dampfdichte vollendet. Man befreit den Apparat vom Filzmantel und lässt ihn langsam abkühlen, wobei, infolge der Condensation des Dampfes, in den Apparat an Stelle dessen Luft eintreten wird; falls die Heizflüssigkeit vor Feuchtigkeit geschützt werden soll, wie z. B. das bei Anwendung von absolutem Alkohol der Fall ist, wird das offene Ende des Kühlers mit einer Chlorcalciumröhre verbunden. Nach der Abkühlung wird der Apparat auseinander genommen, wobei man den umgekehrten Weg wie bei seiner Zusammenstellung einschlägt. Die Heizflüssigkeit wird in das für sie bestimmte Gefäss ausgegossen und der Apparat zu einer neuen Dampfdichtebestimmung hergerichtet.

Das beschriebene Verfahren bleibt unter allen Umständen dasselbe.

Was die Heizflüssigkeiten anlangt, so gebrauchte ich die allgemein zu diesem Zwecke verwendete und von A. W. Hofmann eingeführten, Wasser und Anilin<sup>1)</sup>, zu denen ich noch nach dem Beispiele von V. Meyer, das Xylol<sup>2)</sup> und endlich für sehr niedrig siedende Körper (Aethyläther, Schwefelkohlenstoff, Chloroform) absoluten Alkohol<sup>3)</sup> mit sehr gutem Erfolge angewendet.

Der absolute Alkohol hat sich bei vielen Versuchen, die ich damit angestellt habe, so gut bewährt, dass ich seine Anwendung als Heizflüssigkeit nur empfehlen kann, dabei möchte ich nur auf einige Bedingungen aufmerksam machen, deren Erfüllung sich aus der Erfahrung als nothwendig erwiesen hat. Der absolute Alkohol wird über Aetzkalk in Stücken aufbewahrt, ebenso wie dies bei der Wasserbefreiung desselben nach dem Verfahren von Mendelejeff geschieht; ausserdem ist es gut, in das Heizgefäss, und zwar auf dem Dache des Mantels, einige Stücke Aetzkalk zu bringen. Arbeitet man unter diesen Bedingungen, so ist es geradèzu zu bewundern, wie man stundenlang eine vollkommen constante Temperatur unterhalten kann.

1) Siedepunkt 180—181°.

2) Siedepunkt 136—137°.

3) Siedepunkt 77,5—78°.

Die Füllung des Fläschchens wurde bei flüssigen Substanzen auf folgende Weise ausgeführt.

Das ausgetrocknete Fläschchen, in welches man unter Umständen neben der Substanz eine bekannte Menge von Quecksilber bringt, wird mit Filtrirpapier umgeben, dann mit der betreffenden Substanz gefüllt und sofort mit dem Stöpsel verschlossen. Alsdann ergreift man es mit einer Pincette und entfernt mittelst Filtrirpapier die etwa noch anhängende Flüssigkeit; nun wird das Fläschchen gewogen und nach der Wägung sofort in den Apparat nach den angedeuteten Regeln hineingebracht. Das Umwickeln mit Papier ist namentlich bei niedrig siedenden Flüssigkeiten nothwendig, damit diese nicht durch die Handwärme verdampfen, wodurch bei der später eingetretenen Abkühlung des Fläschchens die Entstehung von Luftblasen in der Flüssigkeit bedingt ist.

Die mit Sorgfalt rein hergestellten Flüssigkeiten, die mir zur Bestimmung der Dampfdichte dienten, wurden in Glashüllen von der Form Fig. 7 aufbewahrt. Zum Herausgiessen der Flüssigkeit werden beide zugeschmolzene Enden abgebrochen, und nach dem Ausgiessen der Flüssigkeit, was sehr bequem und tropfenweise geschieht, sofort wieder zugeschmolzen, sodass die Substanz kaum mit Luft in Berührung kommt.

Feste Körper, welche schmelzen, ohne sich dabei zu verflüchtigen, werden im Fläschchen selbst geschmolzen; man bringt es zu diesem Zweck in ein Sandbad von geeigneter Temperatur; beabsichtigt man einen Theil des Fläschchens mit Quecksilber zu füllen, so wird dieses zunächst in das Fläschchen hineingebracht und die Substanz im Fläschchen über dem Quecksilber geschmolzen. In beiden Fällen ist der Stöpsel des Fläschchens, noch während die Substanz halb geschmolzen ist, hineinzupressen. Feste Körper, welche nicht schmelzen ohne sich dabei zu verflüchtigen, können in ein abgewogenes Stückchen Bleipapier eingewickelt und dann in demselben fest zusammengedrückt werden, wonach die so eingewickelte Substanz in das Fläschchen hineingeschoben, gewogen und der frei gebliebene Raum im Fläschchen mit

Quecksilber erfüllt wird. Dieses letzte Verfahren habe ich auch, anstatt des Einschmelzens, beim Oxalsäuremethyläther angewendet und sehr bequem gefunden, da man dabei sicher sein kann, dass die Luft aus den Zwischenräumen der porösen Substanz vollkommen entfernt ist. — Jedenfalls ist ein solches Verfahren sicherer als das von einigen Experimentatoren angewendete und vorgeschlagene Eindringen der Substanz in das Fläschchen. — Nachtheilig wäre dabei vielleicht die durch das Hineinbringen von Blei entstehende Verunreinigung des Quecksilbers, welche letztere übrigens nur sehr gering sein kann.

Die Reinigung des „Dampfdichtedilatometers“, welche unbedingt vor jeder neuen Dampfdichtebestimmung vorgenommen werden soll, wird auf folgende Weise bewerkstelligt. Die Oeffnung der Glasröhre *b* wird mittelst eines Gummistöpsels, durch welchen eine kleine, rechtwinklig gebogene, Glasröhre hindurchgeht, verschlossen; durch diese Röhre wird der Apparat unter der Luftpumpe mit der Waschflüssigkeit gefüllt und ebenso diese letztere daraus entfernt. Ferner wird die Stahlhülse, um jede Berührung mit Säuren und dergleichen zu vermeiden, mit einem Gummiüberzug versehen. Von den Metalltheilen des Apparates bedarf die Hülse natürlich keiner Reinigung, wohl aber müssen von Zeit zu Zeit die sich reibenden Oberflächen des Verschlusses mit Graphitpulver versehen werden.

Zum Auswaschen wurde concentrirte Salpetersäure und Wasser angewendet; zum Schlusse wird einmal mit absolutem Alkohol ausgepült, wodurch ein schnelleres Trocknen des Apparates<sup>1)</sup> erreicht wird.

Das Gesagte möge genügen, um die praktischen Manipulationen mit dem Apparat als hinreichend erklärt zu betrachten, und ich wende mich nunmehr zur:

#### Berechnung der Resultate.

Die Berechnung der Dampfdichte aus den Versuchsbeobachtungen geschieht nach der einfachen Formel:

1) Durchs Säugen von warmer Luft durch den sich im Trockenschranke befindlichen Apparat.



$$DD = \frac{m}{V_t} \cdot \frac{760 (1 + 0,003\,665 \cdot t)}{0,001\,292\,8} \cdot \frac{1}{b_0 + \delta_t - \sigma_t},$$

wo:

$m$  das Gewicht der angewendeten Substanz in Grammen,  
 $t$  die Temperatur des Dampfes der Heizflüssigkeit,  
 $v_t$  das Volumen des Dampfes bei  $t^\circ$  in Cubikcentimetern,  
 $b_0$  der auf  $0^\circ$  reducirte Barometerstand während des Versuches in Millimetern,

$\delta_t$  die der Temperatur  $t$  entsprechende Capillardepression in Millimetern,

$\sigma_t$  die Spannkraft des Quecksilberdampfes für die Temperatur  $t$  in Millimetern,

0,003 665 der Ausdehnungscoefficient der trockenen Luft,  
 0,001 292 8 die Dichtigkeit der trockenen Luft bei  $0^\circ$   
 und 760 mm Druck bedeuten.

Diese Formel, deren einfache Ableitung ich wohl nicht auszuführen brauche, enthält sämtliche Correctionen und ist daher auch die einzige, die für das Verfahren angegeben werden kann. Es erübrigt mir nur, die Berechnung von  $v_t$ , d. h. des Volumens des Dampfes bei  $t^\circ$  näher zu besprechen, da die übrigen Glieder der Formel nur eine mechanische Rechnung erfordern.

Zur Bestimmung des Volumens des Dampfes ist, wie oben erwähnt, die Kenntniss der Menge des Quecksilbers erforderlich, welche anfangs im Apparate enthalten ist. Diese Bestimmung kann aber offenbar durch directe Wägung nicht ausgeführt werden, weil ja der Apparat dabei schon in das Heizgefäß eingebracht, resp. fest damit verbunden ist; sie wird nunmehr rechnerisch, und zwar viel genauer, als durch unmittelbare Wägung, ausgeführt. Da wir stets als Anfangstemperatur  $r$  die Zimmertemperatur nehmen, so genügt es offenbar, das Gewicht des Quecksilbers im Apparate bei  $0^\circ$  und bei einer weiteren constanten Temperatur  $t$  (also z. B. bei der Temperatur des siedenden Wassers) zu kennen, um aus diesen Daten einen Ausdruck abzuleiten, der uns das Gewicht des Quecksilbers im Apparate für jede beliebige, zwischen  $0^\circ$  und  $t^\circ$  liegende Temperatur unmittelbar gibt. Bezeichnen wir mit

$G_0$  und  $G_t$  die Gewichte des Quecksilbers im Apparate bei  $0^\circ$  und bei  $t^\circ$ , so lautet der oben genannte Ausdruck:

$$G_r = G_0 - \frac{G_0 - G_t}{t} \cdot \tau$$

gleich dem Gewichte des Quecksilbers im Apparate für die Anfangstemperatur  $\tau$ .<sup>1)</sup> Dabei ist aber nur der mehrfach erwähnte Umstand nicht zu vergessen, dass bei sämtlichen Bestimmungen der Gewichte des Quecksilbers das Fläschchen sich im Apparate befindet und also ebenfalls mit Quecksilber gefüllt gedacht werden soll.

Haben wir nun, wie das bei der Bestimmung der Dampfdichte der Fall ist, im Fläschchen eine gewisse Menge Substanz, so muss aus dem Gewichte  $G_r$  diejenige Menge von Quecksilber subtrahirt werden, welcher der eingeführten Substanzmenge entspricht; dies ist aber ohne Schwierigkeit auszuführen. Denn in der That: wir kennen einerseits das Gewicht  $Q_f$  des Quecksilbers, welches das Fläschchen faast, und andererseits die Menge des Quecksilbers, welches im Fläschchen neben der Substanz enthalten ist,  $Q_s$ ; folglich ist die Differenz der beiden Grössen  $Q_f$  und  $Q_s$  der gesuchte Subtrahend der Grösse  $G_r$ .

Haben wir nun das „Anfangsgewicht“ des Quecksilbers im Apparate, die Menge des durch die Bildung des Dampfes aus dem Apparate verdrängten Quecksilber  $G_t$  sowie das bekannte Volumen  $V_a$  des Apparates bei der Temperatur  $t$  der Heizflüssigkeit, so findet man ohne weiteres das gesuchte Volumen  $V_f$  des Dampfes.

Es möge folgendes Beispiel (Abschrift vom Versuchshefte) die Art der Berechnung der Dampfdichte aus den Versuchszahlen näher auseinandersetzen.

1) Für den Apparat, dessen ich mich bei meinen Versuchen bediente, war der Werth von  $G_r$ :

$$G_r = 790,3024 - 0,1477\tau; \text{ wobei } \begin{cases} G_0 = 790,3024 \\ G_t = 775,7643 \dots (t = 98,4^\circ). \end{cases}$$

## Beispiel.

## Versuch Nr. 9.

Substanz, deren Dampfdichte zu bestimmen ist: Aethyl-  
alkohol  $C_2H_5O = 46$ .

Ihre Dampfdichte  $\left\{ \begin{array}{l} \text{berechnet } 1,5939, \\ \text{gefunden } 1,6072. \end{array} \right.$

Heizflüssigkeit: Wasser.

## I. Beobachtungen.

Barometer bei  $17^\circ = b = 720,5 \text{ mm}$ ,

Barometer bei  $0^\circ = b_0 = 718,38 \text{ mm}$ ,

„Anfangstemperatur“  $= \tau = 17,2^\circ$ ,

Temperatur des Dampfes  $= t = 98,43$ .

## II. Wägungen.

Substanz + Fläschch. + Quecksilb. + Uhr glas  $= \alpha = 7,3668$ ,

Fläschch. + Quecksilb. + Uhr glas  $= \beta = 7,3218$ ,

Fläschchen + Uhr glas  $= \gamma = 5,9147$ .

Daraus:  $m = \alpha - \beta = 0,0450$ ;  $Q_1 = \beta - \gamma = 1,4071$ .

Bei  $t^\circ$  herausgefloss. Quecksilb. + Wägungsglas  $= \eta = 453,281$ ;

Wägungsglas allein  $= \zeta = 30,631$ .

Daraus:  $Gt = \eta - \zeta = 422,650$ .

## III. Constante Zahlen für den Versuch.

$\delta_1$  = Capillardepression bei  $t^\circ = 8,9 \text{ mm}$ ,

$\sigma_t$  = Spannkraft des Quecksilberdampfes bei  $t^\circ = 0,72 \text{ mm}$ ,

$Q_1$  = Gewicht des Quecksilbers, welches das Fläschchen

bei gewöhnlicher Temperatur fasst,  $= 2,577 \text{ g}$ ,

$G_1$  = Anfangsgewicht des Quecksilbers im Apparate für  
die Temperatur  $\tau = 787,763 \text{ g}$ ,

$V_a$  = Volumen des Apparates bei  $t^\circ = 58,096 \text{ ccm}$ .

## IV. Berechnungen.

Angefangen mit der Menge von Quecksilber:  $787,763 \text{ g}$ ,  
vermindert um die Grösse:  $Q_1 - Q_2 = 2,5770 - 1,4071 = 1,1699 \text{ g}$ .  
also mit  $787,763 - 1,1699 = 786,5931 \text{ g}$  Quecksilber.

Bei  $t^\circ$  ist aus dem Apparate das Gewicht  $G_t = 422,650$   
von Quecksilber herausgeflossen.

Es bleiben im Apparate bei  $t^\circ$ :

$786,5931 - 422,650 = 363,9431 \text{ g}$  Quecksilber,

welche das Volumen:

$$\frac{363,9431}{13,596 (1 - 0,0001815 \cdot 98,43)} = 27,255 \text{ ccm einnehmen.}$$

Es ist aber das Volumen des Apparates bei

$$t^0 = V_a = 58,096 \text{ ccm;}$$

folglich ist das gesuchte Volumen des Dampfes bei  $t^0$ :

$$58,096 - 27,255 = 30,841 \text{ ccm} = V_t.$$

Setzen wir nun unsere Versuchszahlen in die oben angeführte Formel, so erhalten wir:

$$DD = \frac{0,0450}{30,841} \cdot \frac{760 (1 + 0,003665 \cdot 98,43)}{0,0012928} \cdot \frac{1}{718,38 + 8,9 - 0,72},$$

welcher Ausdruck uns, nach Berechnung, das oben schon angeführte Resultat:  $DD = 1,6072$  ergibt.

Behufs bequemer Rechnung kann offenbar der Werth des Bruches:

$$\frac{760 (1 + 0,003665 \cdot t)}{0,0012928}$$

für jeden Siedepunkt der anzuwendenden Heizflüssigkeiten ein und für alle mal ausgerechnet werden, sodass die Rechnung eine höchst einfache wird.

#### Belegversuche.

Um das Verfahren der Dampfdichtebestimmung mit meinem Apparate einer Controle zu unterwerfen, habe ich eine grössere Reihe von Versuchen mit Körpern ausgeführt, deren Siedepunkte zwischen den Temperaturen 35—180° lagen, und die zu diesem Zwecke chemisch rein hergestellt wurden. Die dabei erhaltenen Zahlen stimmen sowohl untereinander als auch mit den theoretisch berechneten vortrefflich überein und beweisen zur Genüge, dass der Apparat den gestellten Anforderungen<sup>1)</sup> vollständig entspricht.

Ich gedenke diesen Apparat auch zu benutzen, um die Verhältnisse bei abnormen Dampfdichten sowie das Verhalten der Dämpfe bei verschiedenen Temperaturen genauer zu studiren.

1) Siehe den Anfang dieses Berichtes.

Zusammenstellung der Resultate der Dampfbestimmungen mit dem „Dampfdichtedilatometer“.

	S u b s t a n z			Heiz- flüssigkeit	D a m p f d i c h t e		Menge der bei jeder einzelnen Bestimmung an- gew. Substanz in g
	N a m e	Formel	Mol.-Gew.		Berechnet	Gefunden	
1	Aethyläther . . . .	$C_4H_{10}O$	74,0	34,5—35,0°	2,5641	2,591	0,0235
2	Schwefelkohlenstoff	$CS_2$	76,0	46,0°	2,6394	2,610 2,625 2,624	0,0125 0,0092 0,0177 0,0234 0,0276
3	Chloroform . . . .	$CHCl_3$	119,5	61,0—61,5	4,1407	4,120; 4,110 4,109; 4,098*	0,1798; 0,3093 0,2772; 0,2414*
4	Aethylalkohol . . . .	$C_2H_6O$	46,0	77,5—78,0	1,5939	1,613 1,607	0,0112 0,0450
5	Benzol . . . . .	$C_6H_6$	78,0	81,0—82,0	2,7027	2,713; 2,721 2,739; 2,728	0,0178 0,0127; 0,0093 0,0089; 0,0082
6	Wasser . . . . .	$H_2O$	18,0	98,2—98,4	0,6237	0,628 0,621	0,0072 0,0061
7	Toluol . . . . .	$C_7H_8$	92,0	109,5—111,0	3,1878	3,127 3,141	0,0444 0,0379
8	Essigsäure . . . .	$C_2H_4O_2$	60,0	119,0—119,5	2,0790	1,983 1,977	0,0424 0,0217
9	Oxala. Methyläther	$C_2H_6O_4$	118,0	161,5	4,0887	4,106 4,115	0,1123 0,1205
10	Benzylchlorid . . .	$C_7H_7Cl$	126,5	175,0—176,0	4,3832	4,411 4,409	0,1179 0,0982

Bemerkungen. 1) Die bezeichneten Siedepunkte beziehen sich auf die von mir angewendeten Substanzen bei einem mittleren Barometerdrucke von 115—120 mm; ebenso für die Heizflüssigkeiten.

2) Beim Chloroform sind mit \* die Resultate der Dampfdruckbestimmungen, bei welchen Wasser als Heizflüssigkeit angewendet wurde, bezeichnet.

In der beigelegten Tabelle (p. 491) sind die Resultate beinahe sämtlicher Bestimmungen, die ich ausgeführt habe, eingetragen, die letzte Columne der Tabelle enthält die bei jedem Versuche angewendete Menge der zu untersuchenden Substanz.

Meine Absicht dabei war, daraus ersehen zu lassen, dass man mit einer sehr geringen Menge Substanz noch genaue Resultate erzielt, ja sogar erlaube ich mir zu behaupten, dass noch mit 5 mg, vorausgesetzt dass die Wägung der Substanz bis auf die vierte Decimale genau ist, scharfe Resultate erhalten werden können.

Bei den Arbeiten mit dem „Dampfdichtedilatometer“ braucht die manuelle Geschicklichkeit des Arbeitenden nicht grösser zu sein als wie bei der Bestimmung der Dampfdichte nach den anderen Verfahren, welche auf dem „Verdrängungsprincipe“ beruhen. Im Gegentheil, die Arbeit mit dem Apparate erfordert weder besondere Kunstgriffe, Nachhelfen und dergleichen, noch eine vorherige „Einübung“, sondern nur eine sorgfältige Ausführung.

Ich will nicht unterlassen darauf hinzuweisen, dass auch zur raschen und annähernden Untersuchung einer Substanz nach einer der „Vergleichungsmethode von Landolt<sup>1)</sup>“ ähnlichen Methode, der Apparat sich sehr gut eignet. Man braucht nur ein und dasselbe Fläschchen zuerst mit einer „Normalsubstanz“<sup>2)</sup> und dann mit der zu untersuchenden zu füllen und beide mal die Menge des Quecksilbers im graduirten Cylinder zu beobachten, welche infolge der Verdampfung der Substanzen, bei einer und derselben Temperatur, aus dem Apparate herausgeflossen ist.

München, den 1. Mai 1884.

1) Landolt, Chem. Ber. 5. p. 497. 1872.

2) Dient als Vergleichungssubstanz ein Körper von ungleicher chemischer Zusammensetzung, so werden beide Substanzen im Verhältnisse ihrer Moleculargewichte abgewogen.



## II. Ueber ein neues Verfahren zur Bestimmung der Dampfdichte hochsiedender Körper; von Nik. von Klobukow.

Stud. chem. an der technischen Hochschule zu München.

(Hierzu Taf. VI Fig. 11–17.)

Nachdem es mir gelungen ist, mit Anwendung meines Apparates<sup>1)</sup> die Frage über die genaue Bestimmung der Dampfdichte für niedrigsiedende Körper in präziser und einfacher Weise zu lösen, bemühte ich mich, einen Apparat zu construiren, der, den Bedingungen der Einfachheit und Genauigkeit möglichst entsprechend, zur Bestimmung der Dampfdichte für hochsiedende Körper geeignet ist. Dabei fasste ich zunächst die Kategorie von Körpern ins Auge, deren Siedepunkt über 200° liegen, und welche die Wood'sche Legirung nicht angreifen. Zwar kann man dazu die präzise Dumas-Deville-Troost'sche Methode anwenden, da sie aber ziemlich schwierig (mit kleinen Mengen von Substanz gar nicht) auszuführen ist, so ist es begreiflich, wenn ich bestrebt war, sie durch eine leichter ausführbare zu ersetzen.

Dasselbe Ziel verfolgend, hat V. Meyer seine Methode der Dampfdichtebestimmung<sup>2)</sup> mit Anwendung des von A. W. Hofmann herrührenden „Verdrängungsverfahrens“ angegeben, welche unzweifelhaft als wichtiger Fortschritt im Gebiete der sonst dürftigen Methoden der Untersuchung der Dampfdichte hochsiedender Körper zu bezeichnen ist.

Allein im Bezug auf die Leichtigkeit der Ausführung lässt diese Methode noch manches zu wünschen übrig, abgesehen von einigen kleinen Fehlerquellen<sup>3)</sup>, die ihr anhaften, und einer durchaus nicht leichten Rechnung.

1) Siehe meinen vorige Abhandlung.

2) V. Meyer, Chem. Ber. 9. p. 1216. 1876.

3) Ich verweise nur auf die Art und Weise, wie die wirksame Quecksilbersäule gemessen wird, auf die Füllung des Apparates und Einführung der Substanz, sowie auf den Umstand, dass die Capillardepression in der schmaleren Schenkelröhre nicht berücksichtigt worden ist.

Meinen Apparat gründete ich auf das Archimedische Princip und gab ihm die einfache Gestalt eines Aräometers. Dem entsprechend will ich den Apparat in der Folge als „Dampfdichtearäometer“ bezeichnen und gehe nunmehr zur Beschreibung desselben über.

Denken wir uns ein Aräometer, mit einer irgendwie angebrachten Vorrichtung zum Auflegen von Gewichten, in einer Flüssigkeit (sagen wir sogleich in der anzuwendenden Sperrflüssigkeit) schwimmen, und bei einer gewissen Temperatur  $t^{\circ}$  (also z. B. bei der Temperatur des Dampfes) bis auf eine bestimmte Marke  $m$  in diese Flüssigkeit eintauchend, wobei ein Theil des Aräometerkörpers ebenfalls mit der Sperrflüssigkeit gefüllt ist. Bringen wir jetzt in den letztgenannten Theil des Aräometers eine abgewogene Menge der Substanz, deren Dampfdichte wir bestimmen wollen, und lassen sie darin verdampfen, so wird offenbar durch den gebildeten Dampf eine bestimmte Menge der Sperrflüssigkeit verdrängt; der ganze Apparat wird dadurch leichter werden und aufschwimmen. Um ihn nun wieder bis auf die früher genannte Marke  $m$  einzutauchen, wird eine bestimmte Belastung  $Q$  der Wagschale des Aräometers erforderlich sein, welche Belastung, mit Rücksicht auf den durch das Einbringen der Substanz bedingten Auftrieb des Apparates, uns unmittelbar das dem Volumen des Dampfes entsprechende Gewicht der verdrängten Sperrflüssigkeit angibt. Kennen wir ausserdem noch den Druck, unter welchem sich das gemessene Volumen des Dampfes befindet, so haben wir alle zur Bestimmung der Dampfdichte erforderliche Daten.

Es handelte sich nun vor allem darum, die Anwendbarkeit der neuen Methode durch passende Versuche einer strengen Prüfung zu unterwerfen, wobei es mir am zweckmässigsten erschien, diese Versuche bei möglichst ungünstigen Bedingungen auszuführen. Zu diesem Behufe operirte ich bei diesen vorläufigen Probeversuchen mit Quecksilber als Sperrflüssigkeit, und zwar bei einer Temperatur von  $100^{\circ}$ , womit offenbar gleichzeitig constatirt werden konnte, ob das Verfahren auch als solches, d. h. für niedrige Temperaturen anwendbar ist.

Die dabei erzielten, höchst befriedigenden Resultate veranlassen mich, schon heute darüber zu berichten.

Im Folgenden werde ich nur das bereits erprobte Verfahren mit Anwendung von Quecksilber als Sperrflüssigkeit besprechen und nur hier und da auf diejenigen Abänderungen hinweisen, welche ich bei den Arbeiten bei hohen Temperaturen, mit Anwendung der Wood'schen Legirung als Sperrflüssigkeit, vorzunehmen gedenke.

Der Apparat, dessen ich mich bei meinen Versuchen bediente, und welcher in den Fig. 11 und 12 schematisch abgebildet ist, besteht aus drei wesentlichen Theilen: 1) dem aräometerähnlichen Glasgefässe *abc*; 2) dem damit fest verbundenen Stahlrahmen *RR* und 3) der an letzterem angebrachten Wagschale *W*.

Der Aräometerkörper besteht aus dem cylindrischen dünnwandigen Gefässe *a* ( $\frac{1}{2}$  mm Wandstärke), welches oben abgeschlossen ist, unten eine Oeffnung *o* besitzt, mittelst welcher es mit der Sperrflüssigkeit im Schwimmgefässe communicirt; das ist derjenige Theil des Apparates, in welchem die Bildung des Dampfes stattfindet. Am oberen Theile des Gefässes *a* ist der hohle Theil *b* in Form einer Kugel angeschmolzen, welcher durch die Röhre *c*, die gleichzeitig als Stiel des Apparates dient, mit der Luft communicirt; diesem Theile des Aräometerkörpers kommt lediglich die Function eines Schwimmers zu, dessen Dimensionen so berechnet werden müssen, dass er dem Gewichte sämtlicher Theile des Apparates, beim Eintauchen des Aräometers in die betreffende Flüssigkeit (welch' letztere dabei auch den Theil *a* des Aräometerkörpers erfüllt), das Gegengewicht hält.

Mit anderen Worten, es muss das Gewicht der durch den Schwimmer *b* verdrängten Sperrflüssigkeit grösser sein, als das Gewicht der sämtlichen Theile des Apparates, sodass er stets in der Flüssigkeit so zu schwimmen kommt, dass er nur durch nachträgliches Auflegen von Gewichten auf die Wagschale *W* bis an die Marke *m* einsinkt.

Der Rahmen *RR* aus hartem Stahl muss den Bedingungen einer geringen Biegsamkeit und eines kleinen

Gewichtes möglichst entsprechen; er ist mit der Eisenhülse *H* fest verbunden, und zwar in der Art, dass er in entsprechende Oeffnungen der letzteren hineingeschoben wird, sodass er, falls nothwendig, bequem von derselben getrennt werden kann. Die mittlere Oeffnung der Hülse *H* entspricht den Dimensionen des Aräometerstieles *c*, sodass durch einfaches Auf-schieben der ersteren auf den Stiel bis an den kleinen Wulst *s* am Stiele die Verbindung dieser Theile bewerkstelligt wird.

Das eiserne<sup>1)</sup> Gefäss *mnpq* mit Quecksilber, in welchem der Apparat zu schwimmen kommt, befindet sich innerhalb eines entsprechend eingerichteten doppelwandigen Heizgefässes *efgh* (Fig. 12), welches von unten mittelst eines grossen, auf der Unterlage *M* stehenden Brenners *B* geheizt wird; auf dieser Unterlage ruht auch das Heizgefäss. Der Dampf der Heizflüssigkeit wird durch die Röhre *V* abgeleitet, oder, falls man eine Condensation des ersteren vornimmt, in das Heizgefäss zurückgeführt. Endlich dient der Ring *Q*, welcher selbst mit dem Heizgefässe in fester Verbindung steht, zur sicheren Führung des Aräometers.

In diesem Ring, dessen zweckmässigste Einrichtung auf der Fig. 14 angedeutet ist, bewegt sich der dünne Metalldraht *F*, welcher als Verlängerung des Aräometerstieles dient; er ist mit demselben durch blosses Hineinschieben in die Röhre verbunden.

Anstatt des Ringes, wie er auf Fig. 14 abgebildet ist, kann auch einfach eine Drahtschleife, wie Fig. 13 zeigt, angebracht werden. Durch diese Einrichtung wird ein etwaiges Anstossen oder eine Reibung des Aräometerkörpers an den Wandungen des Gefässes *mnpq* verhindert, ausserdem ist durch den Rahmen der Schwerpunkt des Apparates sehr tief verlegt, wodurch ein senkrechtes Schwimmen desselben erzielt ist.

Das eine Ende eines Stromkreises, bestehend aus dem Elemente *E*, dem Galvanometer *G* und dem Commutator *C*

1) Ich bediente mich bei meinen ersten Versuchen sehr bequem eines Thongefässes, wie es bei den galvanischen Batterien angewendet wird.

ist mit dem Ringe  $Q$  und von da, mittelst der führenden Stange  $F$ , mit einem Drahte, der durch die Oeffnung des Aräometerstiels hindurchgeht und bei  $m$  endigt, leitend verbunden; ferner das andere Ende des Stromkreises mit dem Quecksilber des Gefässes  $mnpq$  verbunden (eine Einrichtung, deren Zweck später klargelegt wird).

Ueber die praktische Ausführung dieses einfachen Apparates ist wohl nur wenig zu sagen. In der Fig. 13 ist der vollkommen montirte Apparat etwa in ein Viertel der natürlichen Grösse abgebildet, wobei die Bezeichnungen der Fig. 12 beibehalten sind.

Was die Dimensionen der einzelnen Theile anlangt, so können und brauchen darüber keine Angaben gemacht zu werden: es richten sich die Dimensionen des Rahmens und der Wagschale nach denen des Aräometers, und ebenso die des Gefässes  $mnpq$ .

Das mit Quecksilber gefüllte cylindrische Eisengefäss  $mnpq$  ruht auf einer Holzunterlage  $iii$ , welche auf dem Boden des Heizgefässes angebracht ist; es ist auch nicht fest mit dem Deckel des Heizgefässes verbunden, sondern kommt in einer entsprechenden Oeffnung desselben zu stehen und wird durch Auflegen eines starken Gummibandes mit dem Rande der genannten Oeffnung dicht verbunden.

Im Deckel des Heizgefässes befinden sich weiter Oeffnungen zum Einbringen des Thermometers  $T$ , der Dampfableitungsröhre  $v$  und der Röhre  $r$ , die zum Hineinbringen der Heizflüssigkeit dient.

Endlich ist am Deckel die Stange  $y$  aus Glas, Holz oder einem anderen Isolator befestigt, welche die Klemmen  $K'$  und  $K$  trägt, mittelst welcher die Zuleitung in den führenden Ring  $Q$ , resp. in das Quecksilber des Gefässes  $mnpq$  bewerkstelligt wird. Von aussen werden die Wandungen und der Deckel des Heizgefässes mit Filz oder Carton umgeben; die Oeffnung des Schwimmgefässes wird ausserdem nach der Einführung des Aräometergefässes durch einen aus zwei Hälften bestehenden Cartondeckel  $D$  verdeckt, so-

dass nur für den Stiel des Apparates eine Oeffnung zurückbleibt.<sup>1)</sup>

Die Einrichtung des Gehäuses, innerhalb dessen die Wagschale *W* zu hängen kommt, und der anderen Theile, die aus der Zeichnung leicht zu ersehen sind, brauche ich nicht näher zu beschreiben und wende mich nunmehr zur:

Beschreibung der Ausführung einer Dampfdichtebestimmung mit dem „Dampfdichtearäometer“.

Zu diesem Zwecke ist zunächst die Ermittlung zweier constanten Grössen für den gegebenen Apparat erforderlich, und zwar:

- 1) die Bestimmung des Gewichtes des Quecksilbers *G<sub>a</sub>*, welches der Theil *a* des Aräometerkörpers bei der Temperatur *t*<sup>0</sup>, bei welcher die Dampfdichte genommen wird, fasst;
- 2) die Bestimmung der Belastung *Q* der Wagschale, unter welcher der gleichfalls mit Quecksilber gefüllte Apparat bei der Temperatur *t*<sup>0</sup> bis zur Marke *m* eintaucht. Es ist dies nichts anderes als der Auftrieb, welchem der Apparat ohne Dampf ausgesetzt ist.

Ich bemerke hierbei, um Wiederholungen zu vermeiden, dass bei den genannten und sämtlichen nächstfolgenden Bestimmungen das Fläschchen, in welchem die zu untersuchende Substanz in den Apparat gebracht wird, sich stets in demselben befindet, wodurch die Correction für dasselbe von vornherein ausgeschlossen ist. Die Bestimmung des Gewichtes des Quecksilbers im Apparate bei der Temperatur *t*<sup>0</sup> geschieht in der einfachen Weise, dass man den Theil *a* des Aräometergefässes durch die Oeffnung *O* mit trockenem Quecksilber füllt, das mit Quecksilber gefüllte Fläschchen hineinbringt und das ganze (Oeffnung *O* nach oben gerichtet)

1) Bei den Arbeiten mit der Wood'schen Legirung bei hohen Temperaturen (Schwefeldampf u. dgl.) gedenke ich ein Gefäss aus emailirtem Eisen zu gebrauchen, wobei das Schwimmgefäss mit dem Deckel des Heizgefässes in fester Verbindung stehen wird.



in einem geeigneten Gefässe der Temperatur  $t^{\circ}$  im Dampfe der betreffenden Heizflüssigkeit aussetzt.

Nach etwa  $\frac{1}{4}$ stündigem Erhitzen lässt man erkalten und wägt das im Apparate zurückgebliebene Quecksilber, welches man zu diesem Zwecke in ein geeignetes Gefäss ausgegossen hat. Dabei ist aber einiges über diese Manipulation zu bemerken. Die Oeffnung *O* wird mittelst einer kleinen schweren Eisenplatte zugedeckt, wodurch: erstens das Aufsteigen des Fläschchens vermieden, zweitens der Ungenauigkeit der Bestimmung infolge der Bildung einer Quecksilberkuppe in der Oeffnung *O* vorgebeugt ist. Das Aufhängen des mit Quecksilber gefüllten Apparates im Dampfe der Heizflüssigkeit geschieht in einer leicht begreiflichen Weise und bedarf keiner näheren Erklärung.

Um den Auftrieb des Apparates ohne Dampf bei der Temperatur  $t^{\circ}$  zu bestimmen, füllt man das Aräometergefäss mit Quecksilber, bringt in dasselbe das ebenfalls mit Quecksilber gefüllte Fläschchen, verschliesst alsdann die Oeffnung *O* mit dem Finger und steckt den Apparat in das Quecksilber des Gefässes *mnpq* ein. Alsdann wird der Stiel des Aräometers in die Hülse *H* des Rahmens *RR* hineingeschoben, resp. mit demselben in feste Verbindung gebracht, die Wagschale *W* an den letzteren angehängt. Hierauf wird der Stab *F* durch das spiralförmig gewundene Ende des Zuleitungsdrahtes in die Oeffnung des Stieles *c* gesteckt (siehe Fig. 11 und 12); ferner wird der führende Ring *Q* durch Verstellung der Klemmschraube *K* (siehe Fig. 13) so weit heruntergeschoben, dass sich der Stab *F* in demselben auf und ab bewegt, wobei durch gegenseitige Berührung auch diese Theile miteinander leitend verbunden sind.

Zur Sicherheit des Contactes kann auch am führenden Ringe ein Streifen Kupferfolie *X* (siehe Fig. 13) angebracht werden, welcher sich alsdann an den Draht *F* federnd anlegt.

Der so vollständig montirte Apparat wird nun erwärmt, indem unter das Heizgefäss die Flamme eines grossen Brenners gestellt wird. Ist das Sieden der Heizflüssigkeit eingetreten, so überzeugt man sich, ob auch das Quecksilber im Schwimmgefässe die Temperatur des Dampfes angenom-

men hat; innerhalb 10—15 Minuten ist dies der Fall, und es zeigt das Thermometer in den oberen und unteren Schichten des Quecksilbers dieselbe Temperatur. Es erübrigt alsdann nur noch die Belastung der Wagschale zu bestimmen, bei welcher das Aräometergefäß bis zur Marke *m* in das Quecksilber eintaucht. Dieser letztere Moment wird sich durch einen Ausschlag des Galvanometers *g* kennzeichnen, da ja offenbar durch die Berührung des in *m* mündenden Drahtes mit dem Quecksilber des Gefäßes der Strom geschlossen wird. Die Wägung selbst geschieht auf dieser eigenartigen Wage genau so wie auf einer gewöhnlichen, nur in viel kürzerer Zeit. Auf die Wagschale wird ein bestimmtes Gewicht aufgelegt und einige Zeit abgewartet, bis die dabei stattfindenden verticalen Schwingungen des Apparates aufgehört haben, während der Strom mittelst des Commutators ausgeschaltet ist.

Nun schliesst man den Strom und beobachtet das Galvanometer; so fährt man fort, bis die richtige Zahl von Gewichten aufgelegt ist, d. h. bis der Moment erreicht ist, bei welchem von zwei benachbarten Gewichten das eine einen Ausschlag bewirkt, das andere nicht. Die experimentelle Erfahrung lehrt uns, dass die Gewichte, bei welchen dieses der Fall ist, überraschend klein sind, oder mit anderen Worten, dass die Empfindlichkeit dieser scheinbar groben Wage sehr gross ist. Es ist unser Apparat bis auf Decigramme empfindlich, d. h. die Wägung geht bis auf halbe Decigramme genau.

Andererseits ist aber auch klar, dass das Eintauchen bis zur Marke durch den galvanischen Strom sehr genau und in einfacher Weise signalisirt wird. Diese Einrichtung gestattet uns, die Wägung in der Weise auszuführen, indem der Arbeitende mit der einen Hand das Gewicht auf die Wagschale bringt, mit der anderen den Commutator, der Arretirung der Wage entsprechend, schliesst. Natürlich ist bei der Wägung dafür zu sorgen, dass die Rahmenstangen nicht etwa in Berührung mit den Rändern der Einschnitte im Deckel des Gehäuses kommen, was übrigens von selbst auch nicht geschieht, da keine drehenden Kräfte

vorhanden sind. Die Operation einer Dampfdichtebestimmung mit dem Apparate ist, nachdem die zwei vorbereitenden Bestimmungen ausgeführt sind, eine höchst einfache. Sie unterscheidet sich von der eben beschriebenen Bestimmung von  $Q$  lediglich dadurch, dass, anstatt das Fläschchen nur mit Quecksilber zu füllen, in dasselbe eine bestimmte Menge der zu untersuchenden Substanz kommt.

Ist die Temperatur  $t^{\circ}$  erreicht und die Substanz vollkommen in Dampf umgewandelt, so wird das Gewicht  $Q_1$  gleich dem „Auftriebe des Apparates mit Dampf“ bestimmt, welches auf die Wagschale gelegt werden muss, damit der Apparat bis zur mehrfach erwähnten Marke in die Flüssigkeit eintaucht. Der hierbei gebildete Dampf verdrängt aus dem Theile  $a$  des Apparates eine bestimmte Menge von Quecksilber, infolge dessen das Niveau im Gefässe  $mnpq$  höher wird; man darf daher zum Anfang der Operation nur soviel Quecksilber in das Gefäss  $mnpq$  giessen, dass dasselbe nach vollendeter Dampfbildung noch 2–3 cm unter dem Rande des Gefässes steht. Uebrigens kann nachträglich immer noch soviel Quecksilber als nöthig ist, aus dem Gefässe entfernt werden.

Es ist rathsam, während der ganzen Operation, dafür Sorge zu tragen, dass das Aräometergefäss bis an den Stiel in die Sperrflüssigkeit eintaucht, was durch Auflegen einer grösseren Last auf die Wagschale  $W$  leicht geschehen kann; damit hierbei das Aräometer nicht zu tief in das Quecksilber einsinkt, muss die Wagschale während dieser Operation unterstützt werden. Erst wenn man zur eigentlichen Wägung schreitet, nimmt man die Last von der Wagschale ab, entfernt den Gegenstand (Klotz, Arretirvorrichtung oder dergl.), welcher zur Unterstützung dieser letzteren diente, und ermittelt die nöthige Zahl von Gewichten, die zum Einsenken des Apparates bis an die Marke erforderlich ist.<sup>1)</sup> Die beschriebenen Operationen geben uns un-

1) Bei den Arbeiten mit der Wood'schen Legirung gedenke ich dem Aräometergefässe die Form der Fig. 16 zu geben, wobei der Theil  $b$ , welcher die Rolle eines Schwimmers spielt, das Gefäss  $a$  umschliesst. Die Wahl solch einer Form ist auf der Erfahrung gestützt, dass ein in dieser

mittelbar durch einfache Rechnung das Volumen  $V_t$  des Dampfes. Es erübrigt nur noch, die Bestimmung des Druckes, unter welchem sich das gemessene Dampfvolumen befindet, zu besprechen. Dieser Druck setzt sich zusammen:

1) aus dem während des Versuches gemessenen Barometerstande, und 2) aus dem Drucke der wirksamen Quecksilbersäule, welche gleich ist der Höhe zwischen dem Quecksilberniveau im Aräometertheile  $a$  und jenem im Gefässe  $mnpq$ . Letztere Höhe kann natürlich nicht unmittelbar gemessen werden; man führt diese Messung bei gewöhnlicher Temperatur aus.

Zu diesem Behufe muss in den Theil  $a$  des Aräometers soviel Quecksilber hineingegossen werden, als in demselben bei der Temperatur  $t^0$  des Dampfes sich befand (siehe darüber im Abschnitte „Berechnungen“).

Aus den, bei der gewöhnlichen Temperatur  $\tau$  gemessenen, Höhen  $h'$  und  $h''$  (siehe Fig. 15), wird nun durch Berechnung die wirksame Quecksilbersäule bestimmt. Die einfache Einrichtung, der ich mich zu dieser Messung bediente, ist auf der Fig. 15 abgebildet.

Nachdem in den Theil  $A$  des Aräometers die abgewogene Menge Quecksilber eingegossen ist, wird das Aräometergefäß mit dem Rahmen in Verbindung gebracht und die Oeffnung  $O$  mittelst einer kleinen Gummiplatte  $G$ , welche durch die Eisenplatte  $E$  und die Federn  $FF$  an diese Oeffnung fest angedrückt wird, verschlossen, sodass man alsdann das Gefäß in die Lage der Fig. 15 bringen kann, ohne dass dabei etwas herausfließt. Den so montirten Apparat stellt man auf den Messtisch von dem Kathetometer; hat er die Zimmertemperatur  $\tau$  angenommen, welche man sich notirt, so misst man die Höhen  $h'$  und  $h''$ .<sup>1)</sup>

Art hergestelltes Glasgefäß bis zu sehr hohen Temperaturen erhitzt werden kann, ohne Gefahr des Zerspringens.

1) Die beschriebene Art der Messung wird ebenso bei Anwendung der Wood'schen Legirung ausgeführt, nur dass das verschlossene Aräometer in einem Gefässe mit Wasser von der Temperatur ca. 80–90° eingetaucht sich befindet und darin die Höhen gemessen werden.

Was endlich das Hineinbringen der Substanz<sup>1)</sup> anbelangt, so verweise ich auf meinen vorigen Bericht über das „Dampfdichtedilatometer“; die Form der Fläschchen kann beliebig genommen werden.

Ich wende mich nun zur Beschreibung der Art und Weise, wie die Berechnung der Resultate ausgeführt wird, und werde dieselbe durch ein Beispiel noch weiter erläutern.

### Berechnungen.

Die Berechnung der Dampfdichte aus den Versuchszahlen geschieht nach der Formel:

$$DD = \frac{m}{V_t} \cdot \frac{760 (1 + 0,003665 \cdot t)}{0,0012928} \cdot \frac{1}{b_0 + h_0 - \sigma_t},$$

wobei:

$m$  das Gewicht der angewendeten Substanz in Grammen,

$t$  die Temperatur des Dampfes der Heizflüssigkeit,

$V_t$  das Volumen des Dampfes bei  $t^\circ$  in Cubikcentimetern,

$b_0$  den auf  $0^\circ$  reducirte Barometerstand während des Versuches in Millimetern,

$h_0$  die auf  $0^\circ$  reducirte wirksame Quecksilbersäule in Millimetern,

$\sigma_t$  die Spannkraft des Quecksilberdampfes für die Temperatur  $t^\circ$  in Millimetern,

1) Das Fläschchen kann bei Anwendung der Wood'schen Legirung leider nicht so leicht in den Apparat eingeführt werden, wie bei den Arbeiten mit Quecksilber. Mittelst der in Fig. 17 abgebildeten Vorrichtung geschieht dies indessen ohne Schwierigkeit. —  $K$  ist eine dünnwandige Glaskugel mit zwei lang ausgezogenen Spitzen  $S$  und  $S_1$ , von denen  $S$  zur Füllung der Kugel mit Substanz dient, während  $S_1$  an das Ende eines dünnen Glasstabes  $G$  angeschmolzen ist. Nachdem das mit warmer Wood'scher Legirung gefüllte Aräometergefäß in die ebenfalls warme Legirung des Gefäßes  $mnpq$  bis auf 1—2 cm eingetaucht, wird der beschriebene kleine Apparat, dessen zugeschmolzene Spitze  $S$  etwa in der Mitte mit einem Feilstriche  $f$  versehen ist, wie auf Fig. 17 zu sehen, in das Gefäß eingeführt. Durch leichten Druck an eine der Wandungen wird die Spitze abgebrochen, und nun verbleibt die beschriebene Einrichtung im Apparate, bis die Verdampfung der Substanz geschehen; alsdann entfernt man sie aus dem Apparate und arbeitet im weiteren wie oben beschrieben.

0,003 665 den Ausdehnungscoëfficient der trockenen Luft,  
 0,001 292 8 die Dichtigkeit der trockenen Luft bei  $t^0$   
 und 760 mm Druck,

Die Ableitung dieser einfachen Formel braucht nicht weiter auseinandergesetzt zu werden und es wird nur nöthig sein, die Bestimmung der Grössen  $v$ , und  $h_0$  zu besprechen.

a) Bestimmung des Volumens des Dampfes  $V_t$ . — Sind, wie oben bezeichnet,  $Q_1$  und  $Q$  die Auftriebe des Apparates mit und ohne Dampf (resp. mit und ohne Substanz) bei  $t^0$ , so ist offenbar  $Q_1 - Q$  der Auftrieb, welcher durch das Hineinbringen der Substanz und durch die Bildung des Dampfes bedingt ist. Ich nenne ihn „Gesamtauftrieb“  $A_{+d}$ ; den Auftrieb durch das Hineinbringen der Substanz, den ich durch  $A$ , bezeichnen will, kann man aber sehr leicht finden. Wir kennen das Gewicht  $m$  der Substanz (in der Luft), kennen ferner aus den Wägungen das Gewicht  $\mu$  des Quecksilbers, welches durch die Substanz verdrängt wird, und daraus ergibt sich  $\mu - m = A$ , = Auftrieb durch das Hineinbringen der Substanz. Subtrahiren wir die Grösse  $A$ , von dem Gesamtauftriebe  $A_{+d}$ , so erhalten wir:

$A_{+d} - A = A_d$  = dem Auftriebe, der durch die Bildung des Dampfes zur Wirkung kommt oder = dem Gewichte des Quecksilbers, welches dem Volumen  $V_t$  des Dampfes entspricht; daraus ergibt sich auch unmittelbar das Volumen  $V_t$  des Dampfes selbst.

b) Bestimmung von  $h_0$ . — Ist  $t$  die Zimmertemperatur bei welcher die Messung der Höhen  $h'$  und  $h''$  (Fig. 15) ausgeführt wurde, so erhalten wir die wirksame Quecksilbersäule durch folgende einfache Ueberlegung. Man reducirt die gemessene Höhe  $h''$  auf die Temperatur  $t^0$  des Dampfes, und zwar mit Zuhülfenahme des Coëfficienten der scheinbaren Ausdehnung des Quecksilbers in cylindrischen Gefässen von gewöhnlichem Glase, wodurch die Einführung des cubischen Ausdehnungscoëfficienten des Gefässes sowie des wahren Ausdehnungscoëfficienten des Quecksilbers gänzlich vermieden sind. Bekanntlich ist der Coëfficient der scheinbaren Ausdehnung des Quecksilbers in cylindrischen



Glasgefässen  $\alpha$ , = 0,000 154, sodass die bei  $\tau$  gemessene Höhe  $K'$  des Quecksilbers im Gefässe  $a$  bei  $t^0$  die Grösse:

$$H = K''(1 + 0,000\,154(t^0 - \tau))$$

haben wird, und es ist also  $K' - H = h$  = wirksame Quecksilbersäule bei  $t^0$ , woraus auch unmittelbar  $h_0$ , d. h. die Grösse dieser Säule bei  $0^0$ , bestimmt werden kann.

Streng genommen ist  $K' - H = h$  ebenfalls auf  $t^0$  zu reduciren, d. h. mit dem Factor  $(1 + 0,000\,008\,5(t^0 - \tau))$  zu multipliciren, da sich dieser Theil linear ausgedehnt hätte; allein es ist wohl begreiflich, dass eine solche Correction gar nicht nothwendig ist, da sie kaum auf die vierten bis fünften Decimalen der Rechnung einen Einfluss haben könnte.

Was die Capillardepression im breiten Gefässe  $mnpq$ , sowie im Theile  $a$  des Aräometergefässes anbelangt, so sind diese beide sehr klein und einander gleich anzunehmen, daher fallen sie aus der Rechnung gänzlich aus, ebenso ist es mit der Capillardepression, welche am Stiele des Aräometers stattfindet: da sie bei sämmtlichen Beobachtungen dieselbe bleibt, so eliminirt sie sich von selbst. Die Spannung der Quecksilberdämpfe  $\sigma$ , wird aus den betreffenden Tabellen von Regnault entnommen.

### Beispiel.

Bestimmung der Dampfdichte mittelst des „Dampfdichtearäometers“.

Substanz, deren Dampfdichte zu bestimmen ist: Chloroform  $\text{CHCl}_3$ , = 119,5.

Ihre Dampfdichte  $\left\{ \begin{array}{l} \text{berechnet } 4,1407 \\ \text{gefunden } 4,0971. \end{array} \right.$

Heizflüssigkeit: Wasser.

### I. Beobachtungen.

Barometer bei  $16^0 \text{ C.} = b = 717,5$ ,

Barometer bei  $0^0 = b_0 = 715,51$ ,

Temperatur des Dampfes  $= t^0 = 98,3$ ,

Zimmertemperatur während der Messung der Höhen

$K$  und  $K'' = \tau = 16,1^0 \text{ C.}$

## II. Wägungen.

Substanz + Fläschchen + Quecksilb. + Uhrglas =  $\alpha$  = 8,4956

Fläschchen + Quecksilb. + Uhrglas =  $\beta$  = 8,3809

Fläschchen + Uhrglas =  $\gamma$  = 6,6445

$m = \alpha - \beta = 0,1147$  = Gewicht der angewendeten Substanz

$\beta - \gamma = 1,7364$  = Gewicht des neben der Substanz im Fläschchen sich befindlichen Quecksilbers.

Belastung der { Apparat mit Dampf =  $Q_1$  = 403,680

Wagschale bei  $t^\circ$  { Apparat ohne Dampf =  $Q$  = 25,640

Gesamtauftrieb =  $A_{s+d}$  = 378,040

NB. In beiden Fällen befand sich das Fläschchen im Apparat.

## III. Höhenmessungen.

$K = 112,1$  mm,  $K' = 33,2$  mm.

## IV. Constante Zahlen für den Versuch.

$\sigma_t = 0,75$  = Spannung des Quecksilberdampfes bei  $t^\circ$ ,

$G_d = 602,454$  = Gewicht des Quecksilbers im Apparat bei der Temperatur  $t^\circ$ ,

$Q_t = 2,7827$  = Gewicht des Quecksilbers, welches das Fläschchen bei gewöhnlicher Temperatur fasst.

$\alpha_s = 0,000154$  = Coëfficient der scheinbaren Ausdehnung des Quecksilbers in Gefäßen von gewöhnlichem Glase.

## V. Berechnungen.

1) Bestimmung des Volumens  $V_t$ .

Der Gesamtauftrieb =  $A_{s+d}$  = 378,040.

Der Auftrieb durch das Hineinbringen der Substanz  
=  $A_s = Q_t - (\beta - \gamma) - m = 2,7827 - 1,7364 - 0,1147 = 0,9316$ .

Folglich ist der Auftrieb durch die Bildung des Dampfes

=  $A_d = A_{s+d} - A_s = 378,040 - 0,9316 = 377,11$ .

Daraus ist das Volumen des Dampfes bei  $t^\circ$

$$= V_t = \frac{377,11}{13,596 (1 - 0,0001815 \cdot 98,8)} = 28,241 \text{ ccm.}$$

2) Bestimmung von  $h_0$ .

In das Aräometergefäß wurde die Menge:

$G_d - A_d = 602,454 - 377,11 = 225,344$

von Quecksilber hineingebracht und die Höhen  $K$  und  $K'$  gemessen.

Die bei  $t = 16^{\circ} \text{C.}$  gemessene Höhe  $h'' = 33,2 \text{ mm}$  verwandelt sich bei  $t^{\circ}$  in:

$$H = h''(1 + 0,000154(t - t'))$$

$$= 33,2(1 + 0,000154 \cdot 82,3) = 33,6872 \text{ mm.}$$

Daher ist die wirksame Quecksilbersäule bei  $t^{\circ}$

$$= h = h' - H = 112,1 - 33,69 = 78,41 \text{ mm,}$$

und diese letztere Höhe auf  $0^{\circ}$  reducirt  $= h_0 = 78,19 \text{ mm.}$

Setzen wir die gefundenen Versuchszahlen in die oben angeführte Formel ein, so erhalten wir den Ausdruck:

$$DD = \frac{0,1147}{28,241} \cdot \frac{760(1 + 0,003665 \cdot 98,8)}{0,0012928} \cdot \frac{1}{715,5 + 78,19 - 0,75},$$

welcher nach Berechnung den Werth 4,0971 ergibt, d. h. die gesuchte Dampfdichte der Substanz ist  $= 4,0971$ .

### Belegversuche.

Bei diesen Versuchen wurden die mir zur Verfügung stehenden chemisch reinen Substanzen: Aethylalkohol, Benzol und Chloroform angewendet, sämmtlich, wie gesagt, bei der Temperatur des Wasserdampfes untersucht. Die Resultate beinahe sämmtlicher Versuche sind in der beistehenden Tabelle angeführt. In der letzten verticalen Columnne ist die Menge der zur Bestimmung der Dampfdichten angewendeten Substanz angegeben.

Die untereinander, sowie mit der Theorie übereinstimmenden Zahlen bedürfen wohl keiner weiteren Besprechung.

Was die Ausführung der Methode selbst anlangt, so ist sie eine höchst einfache und kann mit Leichtigkeit, nachdem man sie zwei bis dreimal eingeübt hat, einschliesslich der Vorbereitungen in der Zeit von dreiviertel bis eine Stunde und weniger bewerkstelligt werden, wobei die Anwesenheit des Experimentators nur bei den Wägungen erforderlich ist.

Bei dieser Gelegenheit möchte ich nicht unterlassen, darauf hinzuweisen, dass die Messungen am Kathetometer bei jedem einzelnen Versuche, falls man dergleichen überhaupt nicht gern ausführt, gänzlich weggelassen, resp. durch ein indirectes Verfahren zur Bestimmung der wirklichen Quecksilbersäule ersetzt werden können.

Zusammenstellung der Resultate der Dampfdichtebestimmungen mit dem „Dampfdichtearäometer.“

	S u b s t a n z		Ihre Dampfdichte		Menge der bei jeder einzelnen Bestimmung angewandten Substanz in g
			Berechnet	Gefunden	
1	Chloroform	$\text{CHCl}_3$	4,1407	4,231	0,1132
				4,211	0,1622
				4,097	0,1147
				4,093	0,1357
2	Aethylalkohol	$\text{C}_2\text{H}_5\text{O}$	1,5939	1,627	0,0523
				1,681	0,0608
				1,607	0,0424
3	Benzol	$\text{C}_6\text{H}_6$	2,7027	2,730	0,0557
				2,718	0,0823
				2,687	0,0311

Bemerkungen.

1) Bei der Untersuchung sämtlicher Substanzen wurde als Heizflüssigkeit Wasser angewendet.

2) Die zur Bestimmung der Dampfdichte angewendeten Substanzen waren dieselben wie bei meiner ersten Arbeit mit dem „Dampfdichtedilatometer“.

Dieses Verfahren, welches alsdann den Gegenstand der vorbereitenden Arbeiten bildet, besteht einfach darin, dass man sich eine empirische Tabelle aufstellt, mittelst welcher die Höhe  $h''$  aus der Menge des durch den Dampf verdrängten Quecksilbers direct gefunden werden kann. Man braucht also nur den Auftrieb durch die Bildung des Dampfes  $A_d$  zu kennen, um daraus in der genannten Tabelle die entsprechende Höhe der wirksamen Quecksilbersäule (schon auf  $0^\circ$  reducirt) abzulesen. Die Aufstellung dieser Tabelle wird namentlich von besonderem Nutzen bei den Arbeiten mit der Wood'schen Legirung sein, weil wir uns dabei die leichte aber immerhin zeitraubende Procedur der Füllung des Apparates und Messung in warmem Wasser am Kathetometer ersparen.

Auch die einfache Ausführung des ganzen Apparates, bei welchem nur das Aräometergefäß einer präzisen Ausführung bedarf, sowie die Möglichkeit, mit demselben Apparat viele Bestimmungen ausführen zu können, möchte ich

ich als nicht zu unterschätzende Vortheile des „Dampfdichte-  
aräometers“ hervorheben.<sup>1)</sup>

Nachträglich möchte ich noch erwähnen, dass zur Bestimmung des specifischen Gewichtes der Wood'schen Legirung bei verschiedenen hohen Temperaturen ich den Apparat selbst, als einfaches Aräometer, in einer leicht zu begreifenden Weise anwenden werde. Als Nachtheil des Verfahrens wäre vielleicht die ziemlich grosse Menge von Quecksilber, resp. der Wood'schen Legirung, die zur Füllung des Schwimmgefässes erforderlich ist<sup>2)</sup>, zu bezeichnen, was freilich nur derjenige, welcher ausserhalb eines chemischen oder physikalischen Laboratoriums seine Arbeit auszuführen gedenkt, zu beklagen den Grund hat.<sup>3)</sup>

Ich behalte mir vor, mit meinem Apparate Versuche bei höheren Temperaturen (Joddampf, Schwefeldampf u. s. w.) auszuführen und über deren Resultate genauer zu berichten.

Zum Schlusse meiner beiden Arbeiten sei es mir gestattet, meinem hochgeehrten Lehrer, dem Hrn. Prof. Dr. W. v. Beetz, in dessen Laboratorium ich meine Arbeit ausführte, für sein mir hierbei bezeigtes Wohlwollen meinen wärmsten Dank auszudrücken. Ebenso bin ich verpflichtet, dem Hrn. Dr. A. Lipp, Assistent am chemischen Laboratorium unserer Hochschule, für seine treffliche Unterstützung durch Rath und That während der ganzen Arbeit, ferner den Herren Assistenten am physikalischen Laboratorium Hrn. Dr. E. Pfeiffer und Hrn. L. Weber, meinen besten Dank auszusprechen.

München, den 10. Mai 1884.

1) Die Anfertigung meiner „Dampfdichteartometer“ mit sämtlichen dazugehörigen Vorrichtungen hat das physikalisch-mechanische Institut von Böhm u. Wiedemann in München übernommen. Dabei werden die Aräometergefässe in der Fabrik für Präcisionsglasinstrumente von J. Greiner in München hergestellt.

2) Ca. 5–6 kg Quecksilber, resp. 3–4 kg der Wood'schen Legirung.

3) Dabei ist noch zu bemerken, dass das Quecksilber oder die Legirung im Schwimmgefässe fast nie einer Reinigung bedürfen, weil sie mit den Dämpfen der zu untersuchenden Substanz gar nicht in Berührung kommen.

### III. Ueber den Einfluss des Druckes auf die Viscosität der Flüssigkeiten, speciell des Wassers; von W. C. Röntgen.

(Hierzu Taf. VII Fig. 1 u. 1a.)

Die nachstehend mitgetheilte Untersuchung wurde bereits vor mehreren Jahren (Mai 1880) angefangen; dieselbe blieb aber bis jetzt unvollendet, da ich an einer Fortsetzung durch den Mangel an geeigneten Apparaten, deren Anschaffung aus den geringen dem hiesigen Institut zur Verfügung gestellten Mitteln auf einmal nicht möglich war, verhindert wurde. Ich bin kaum über die Vorversuche hinausgekommen; dieselben genügten aber, um darzuthun, dass es sich entschieden lohnen würde, die Untersuchung zu Ende zu führen; es wurden deshalb die nöthigen Apparate, unter denen zunächst eine bis auf 1000 Atmosphären gehende Cailletet'sche Pumpe zu nennen ist, allmählich angeschafft, und ich hoffte bald in der Lage zu sein, die Arbeit wieder aufnehmen zu können. Da erhielt ich von Hrn. Warburg einen Brief, worin derselbe mir schreibt, dass in seinem Laboratorium eine Untersuchung ausgeführt wäre, welche u. a. zu dem Resultat geführt hätte, dass die Viscosität des Wassers mit zunehmendem Druck abnähme. Hr. Warburg erinnert mich daran, dass ich ihm im Jahre 1881 bei Gelegenheit eines Gespräches über die damals noch nicht veröffentlichte, von ihm in Gemeinschaft mit Hrn. v. Babo unternommene Untersuchung: „Ueber den Zusammenhang zwischen Viscosität und Dichtigkeit bei flüssigen, insbesondere gasförmigflüssigen Körpern“, mittheilte, ich hätte bei den erwähnten Vorversuchen eine Abnahme der Viscosität des Wassers mit zunehmendem Druck gefunden. Hr. Warburg stellt mir anheim, meine Versuche in den Annalen vor der in seinem Laboratorium ausgeführten Arbeit zu veröffentlichen, und ich mache von diesem freundlichen Vorschlag um so eher Gebrauch, als eine Fortsetzung meiner Arbeit mir vorläufig nicht indicirt zu sein scheint.



Der Apparat, mit welchem meine Versuche angestellt wurden, ist in Fig. 1 abgebildet. *AB* ist ein Oersted'sches Piëzometer Magnus'scher Construction; der starkwandige Glaszylinder ist 5,5 cm weit und 62 cm hoch.

Die zu den Reibungsversuchen verwendete Capillare *ab* ist in folgender Weise frei beweglich im Piëzometer aufgehängt; das obere Ende *a* ist in eine Messingfassung *ac* eingekittet, die gelenkig mit dem Querstück *df* verbunden ist. Dieses wie eine stumpfe Schneide geformte Stück liegt auf einer in den Hals des Piëzometers eingeschraubten Messingplatte und kann nach einer Drehung um  $90^\circ$  aus der gezeichneten Lage durch die in der Platte befindliche rechteckige Oeffnung heruntergelassen werden; dies geschieht mit Hülfe eines zu diesem Zweck besonders einzuschraubenden Stieles *C* (Fig. 1<sub>a</sub>). Zwei kleine, auf der Platte befestigte Zäpfchen *d* und *f* verhindern, dass das Querstück mit dem daran hängenden Reibungsapparat sich durch Erschütterungen etc. aus der gezeichneten Lage entfernt. Alle Theile der Aufhängung sind aus Messing verfertigt und sorgfältig gearbeitet, sodass die Unveränderlichkeit der Aufhängung von Versuch zu Versuch gesichert ist.

Die Mündung der Capillare bei *a* ist mit einem dachförmig gebogenen, kleinen Messingschirm überdeckt, damit herunterfallende Stäubchen etc. nicht so leicht in die Capillare hinein gelangen. Das andere Ende *b* mündet in eine 4 cm weite Glaskugel, diese communicirt mit einer zweiten, gleich grossen Kugel, und letztere steht mit einer 0,4 cm weiten, 14 cm langen Glasröhre in Verbindung; bei *g* und *h* sind die Canäle bis auf ungefähr 0,06 cm Weite eingeschnürt.

In dem unteren Theil des Piëzometers befindet sich gut gereinigtes, staubfreies Quecksilber, und der übrige Inhalt desselben, sowie auch der Reibungsapparat ist mit destillirtem Wasser gefüllt; jede Luftblase ist sorgfältig entfernt.

Der Apparat stand in einem grossen, auf zwei gegenüberliegenden Seiten mit Glasplatten verschlossenen Blechgefäss, welches bis zum Rande mit Wasser gefüllt war. Da das Ganze in einem Kellerraum aufgestellt war, der nur für die kurze Zeit einer Ablesung betreten und mit einer Kerze

beleuchtet wurde, so blieb die Temperatur des Piézometers während eines Versuches, auch wenn derselbe über zwei Stunden dauerte, ziemlich constant. Dieselbe wurde durch in Zehntelgrade getheilte Thermometer gemessen.

Der Druck wurde durch eine auf das Piézometer aufzuschraubende Compressionspumpe erzeugt, und die Messung desselben geschah durch ein in das Piézometer eingehängtes Luftmanometer. Leider durften nur Drucke bis zu etwa 25 Atmosphären angewendet werden, und sogar diese geringen Drucke hatten verschiedene mal ein Platzen des Glascylinders und ein Zertrümmern des ganzen Apparates zur Folge, weshalb die Untersuchung dann auch schliesslich aufgegeben werden musste. Das Piézometer hält viel eher einen höheren, aber nur kurz dauernden, als einen geringeren, zwei bis drei Stunden anhaltenden Druck aus.

Die Reibungsversuche theilen sich in zwei Gruppen; die erstere enthält die Versuche bei Atmosphärendruck, die andere die bei höherem Druck. In beiden Fällen wurde die Zeit bestimmt, die ein Volumen Wasser, welches dem Inhalt der unteren Kugel entspricht, braucht, um durch die Capillare zu fliessen. Die zum Fliessen benöthigte Druckdifferenz wird vor Anfang eines jeden Versuches dadurch erzeugt, dass die untere Kugel ganz, die obere ungefähr bis zur Hälfte mit Quecksilber gefüllt wird; das Füllen geschieht durch Einsenken des Reibungsapparates in das Quecksilber des Piézometers mit Hülfe des zu diesem Zweck aufgeschraubten Stieles *C*; wenn eine genügende Menge Quecksilber in die Kugeln eingedrungen ist, so wird der Reibungsapparat gehoben und wieder in die gezeichnete Lage gebracht. Von diesem Augenblicke an strömt das Wasser durch die Capillare in die Kugeln hinein, und das Quecksilber sinkt im Reibungsapparat. Man bestimmt nun die Zeit, zu welcher die Quecksilberoberfläche in die zweite Kugel eintritt, resp. zu welcher dieselbe die Kugel verlässt; beide Momente lassen sich auf Bruchtheile einer Secunde genau bestimmen, da die Bewegung der Oberfläche infolge der geringen Weite der Verbindungsanäle an diesen Stellen eine verhältnissmässig rasche ist.

Die Zeit, welche das Quecksilber braucht, um aus der oberen Kugel auszufließen, d. h. die Zeit, die zwischen dem Aufhängen des Reibungsapparates und der ersten Zeitbestimmung vergeht, genügt vollständig, um während dessen die Thermometer abzulesen und bei den Versuchen mit höherem Druck die Compressionspumpe aufzuschrauben, den gewünschten Druck herzustellen und diesen am Manometer zu beobachten. Nach der zweiten Zeitbestimmung wird abermals die Temperatur bestimmt, und überzeugt man sich davon, dass der Druck constant geblieben ist; hat sich der Druck merklich geändert, so muss der Versuch verworfen werden.

Die zwei folgenden Tabellen enthalten die Beobachtungsergebnisse von zwei Versuchsreihen mit zwei verschiedenen Capillaren. Eine genaue Messung der Dimensionen der Capillaren hat nicht stattgefunden, weil es sich bei den in Rede stehenden Versuchen zunächst darum handelte, die durch Druck erzeugte relative Aenderung der Viscosität zu bestimmen; die erste Capillare wurde beim Platzen des Piëzometers vollständig zertrümmert; von der zweiten wurde vor den Versuchen der Durchmesser zu ungefähr 0,024 cm, die Länge zu 20,6 cm bestimmt.

Tabelle I.

Versuchs- Numer	Anfangs- temperatur	Erste Zeit- bestimmung	Zweite Zeit- bestimmung	End- temperatur	Druck in Atmosph.
1	5,85	3 <sup>h</sup> 24 <sup>m</sup> 58 <sup>s</sup>	4 <sup>h</sup> 19 <sup>m</sup> 40 <sup>s</sup>	5,88	1
2	5,90	5 21 10	6 15 39	5,90	1
3	6,00	7 34 21	8 28 47	6,00	1
4	6,00	9 30 30	10 24 44	6,00	1
5	6,00	12 50 49	1 44 58	6,00	1
6	6,04	3 27 54	4 21 53	6,07	1
7	6,10	1 19 36	2 13 36	6,11	1
8	6,15	3 20 12	4 14 2	6,20	1
9	6,20	5 14 27	6 7 57	6,20	1
10	6,28	7 41 27	8 35 13	6,27	1
11	6,27	10 12 38	11 5 49	6,27	19
12	6,69	7 17 36	8 10 15	6,96	27
13	6,50	2 42 6	3 35 10	6,50	29
14	6,47	8 6 16	8 59 30	6,48	1
15	6,50	12 50 38	1 44 4	6,50	1
16	6,43	12 1 30	12 54 34	6,46	21
17	6,50	3 37 41	4 30 49	6,50	27

Beim 18. Versuche, am 9. Tage seit Anfang der Versuchsreihe, platzte das Piëzometer.

Tabelle II.

Versuchs- Nummer	Anfangs- temperatur	Erste Zeit- bestimmung	Zweite Zeit- bestimmung	End- temperatur	Druck in Atmosph.
1	10,97	10 <sup>h</sup> 29 <sup>m</sup> 13 <sup>s</sup>	12 <sup>h</sup> 59 <sup>m</sup> 45 <sup>s</sup>	11,08	1
2	11,19	4 43 16	7 12 45	11,20	1
3	11,17	7 47 13	10 17 0	11,18	1
4	11,25	2 27 10	4 56 15	11,29	1
5	11,38	8 2 23	10 30 10	11,49	21
6	11,60	3 40 25	6 8 20	11,60	23
7	11,60	8 3 53	10 31 25	11,60	21
8	11,68	4 56 30	7 23 40	11,68	23
9	11,63	7 56 30	10 28 50	11,66	24
10	11,84	3 17 20	5 44 10	11,88	1
11	11,41	8 8 15	10 37 10	11,39	1
12	11,32	8 35 0	11 4 15	11,32	1
13	11,42	3 50 32	6 19 20	11,44	1

Beim 14. Versuche, am 9. Tage seit Anfang dieser Versuchsreihe, platzte das Piëzometer.

Die bei den drei letzten Versuchen dieser Tabelle angegebenen Temperaturen sind die Mittel aus den an drei in verschiedener Höhe neben dem Piëzometer aufgehängten Thermometern gemachten Ablesungen.

Aus diesen beobachteten Werthen ergeben sich nun folgende Ausflusszeiten in Secunden.

## Versuchsreihe I.

## 1) Versuche bei Atmosphärendruck.

Versuchs-Nr.	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	14	15
mittl. Temp.	5,87	5,90	6,00	6,00	6,00	6,05	6,11	6,18	6,20	6,28	6,48	6,50
Aus- { beob.	3282	3269	3266	3254	3249	3239	3240	3230	3227	3226	3194	3206
flusszeit { ber.	3269	3266	3256	3256	3256	3251	3245	3238	3236	3228	3208	3206
Differenz	+13	+3	+10	-2	-7	-12	-5	-8	-9	-2	-14	0

## 2) Versuche bei höherem Drucke.

Versuchs-Nr.	11	12	13	16	17
mittlere Temp.	6,27	6,69	6,50	6,45	6,50
Druck in Atmos.	19	27	29	21	27
Ausfluss- { beob.	3191	3159	3184	3184	3172
zeit { ber.	3229	3189	3206	3211	3206
Differenz	-38	-30	-22	-27	-34

## Versuchsreihe II.

## 1) Versuche bei Atmosphärendruck.

Versuchs-Nr.	1	2	3	4	10	11	12	13
mittlere Temp.	11,03	11,19	11,18	11,27	11,86	11,40	11,32	11,43
Ausfluss-zeit { beob.	9032	8969	8987	8945	8810	8935	8955	8928
{ ber.	9028	8985	8991	8968	8823	8935	8955	8928
Differenz	+4	-16	-4	-23	-13	0	0	0

## 2) Versuche bei höherem Druck.

Versuchs-Nr.	5	6	7	8	9
mittlere Temp.	11,44	11,60	11,60	11,68	11,65
Druck in Atmos.	21	23	21	23	24
Ausfluss-zeit { beob.	8867	8855	8852	8830	8840
{ ber.	8923	8886	8886	8867	8874
Differenz	-58	-31	-34	-37	-34

Aus diesen Versuchen kann man nun mit ziemlicher Sicherheit schliessen, dass die Compression des Wassers eine Verminderung der Ausflusszeit zur Folge hat; sowohl eine graphische Darstellung derselben, in welcher die Temperaturen den Abscissen, die Ausflusszeiten den Ordinaten proportional sind, als eine Berechnung führt zu diesem Resultat.

Bei der Berechnung habe ich angenommen, dass das Mittel aus den drei bei gleicher Temperatur (6,00°) beobachteten Ausflusszeiten der Versuche 3, 4 und 5 der ersten Versuchsreihe, sowie die beim 13. Versuche der zweiten Versuchsreihe gefundene Ausflusszeit richtig sind; letztere deshalb, weil bei diesem Versuch die Temperaturen besonders sorgfältig beobachtet wurden.

Mit Hülfe dieser Werthe berechnete ich zunächst für jede Versuchsreihe die Constanten  $b$  und  $c$  der von Hrn. Slotte angegebenen, bequemen Formel:<sup>1)</sup>  $(t + a)(z + b) = c$ , wo  $t$  die Temperatur und  $z$  die Ausflusszeit bedeutet, und  $a$  den Werth 40,1, das Verhältniss  $b/c$  den Werth  $^{66}_{21891}$  hat.

1) Slotte, Wied. Ann. 14. p. 21. 1881.

Dann wurde für jede einzelne Versuchstemperatur die Ausflusszeit berechnet, sowohl für die Versuche bei gewöhnlichem Druck als für die bei höherem Druck. Die sich ergebenden Differenzen zwischen den beobachteten und den so berechneten Ausflusszeiten können verursacht sein erstens durch die Fehlerhaftigkeit der erwähnten Formel und der Beobachtungen, zweitens aber auch durch den Einfluss, welchen der höhere Druck auf die Ausflusszeit ausübt; letztere Ursache ist selbstverständlich nur bei den Versuchen mit höherem Druck zu suchen. Nun lehrt ein Blick auf die obigen Tabellen, dass diese Differenzen bei den Versuchen mit höherem Druck die durch die Versuche mit gewöhnlichem Druck bestimmten Fehlergrenzen beträchtlich überschreiten, folglich werden die Ausflusszeiten durch die Compression verändert und zwar verringert.

Bevor man nun aus diesem Ergebniss den Schluss zieht, dass die Viscosität des Wassers durch den Druck abgenommen hat, ist es nöthig, dass man untersucht, ob nicht andere Ursachen der beobachteten Abnahme der Ausflusszeiten zu Grunde liegen. Durch die Compression wird

1. das Volumen der zweiten Kugel des Reibungsapparates, folglich das Volumen des während der beobachteten Ausflusszeit durchgeströmten Wassers geändert;

2. werden die Dimensionen der Capillare geändert;

3. wird die Dichte des Wassers und des Quecksilbers und somit die das Strömen erzeugende Druckdifferenz geändert;

4. ändert sich die Temperatur des Wassers infolge der Compression;

5. wird das Niveau des Quecksilbers im Piézometercylinder durch den Druck tiefer gelegt und dadurch die Druckdifferenz, unter welcher das Wasser fliesst, vergrößert.

Eine Berechnung der Grösse dieser Fehlerquellen ergibt, dass nur die zuletzt genannte einen merklichen Einfluss ausüben kann; es wurde nämlich mit dem Kathetometer direct gefunden, dass das Quecksilberniveau im Cylinder durch einen Druck von 24 Atmosphären um 0,010 cm sinkt, und dass die mittlere Druckdifferenz bei der zweiten Versuchs-



reihe ungefähr 10 cm beträgt. Die Compression auf 24 Atmosphären wird somit zur Folge haben, dass die Druckdifferenz um ungefähr 0,1 Proc. zunimmt, folglich die Ausflusszeit um denselben Betrag abnimmt.<sup>1)</sup> Diese bei der zweiten Versuchsreihe sich auf neun Secunden belaufenden Aenderung der Ausflusszeit ist aber viel geringer als die wirklich beobachtete, und man wird deshalb den grösseren Theil dieser Aenderung auf Rechnung der durch den Druck verminderten Viscosität des Wassers zu bringen haben.

Ich habe mich durch directe Beobachtung auch noch davon überzeugt, dass der Reibungsapparat durch die angewendeten Drucke nicht merklich aus dem Quecksilber herausgehoben wurde, was sonst ebenfalls eine Verkürzung der Ausflusszeit bewirkt haben würde.

Dass die mitgetheilten Vorversuche nicht geeignet sind, um mit ihrer Hülfe die genaue quantitative Beziehung zwischen Dichte und Viscosität abzuleiten und so die weitere, interessante Frage zu beantworten, wie die Viscosität bei constant bleibender Dichte sich mit der Temperatur ändert, braucht wohl kaum bemerkt zu werden.

Auch mit Schwefeläther habe ich einige Versuche angestellt und zu denselben einen besonders construirten Reibungsapparat benutzt, der ebenso wie der oben beschriebene in das Piëzometer eingesetzt wurde; der Schwefeläther war durch Quecksilber vollständig von dem im Piëzometer enthaltenen Wasser abgesperrt. Ein bald nach Anfang dieser Versuche eingetretener Bruch des Piëzometers verhinderte aber die Fortsetzung derselben, und ihre Anzahl ist zu gering, um darüber weitere Mittheilung machen zu können.

Nachschrift. Hr. Warburg hat mich darauf aufmerksam gemacht, dass er bereits im Jahre 1870 das von mir zur Construction eines Vorlesungsapparates benutzte Princip der Strömung von Flüssigkeiten durch zwei hinter-

1) Die besprochene Niveauänderung des Quecksilbers im Piëzometercylinder würde bedeutend geringer ausgefallen sein, wenn das Quecksilber in einem besonders in den Cylinder eingesetzten Gefäss enthalten gewesen wäre.

einander gelegene Capillaren zur Controle seiner Versuche über die Viscosität des Quecksilbers angewendet habe.<sup>1)</sup> Leider war mir dies nicht bekannt, als ich die auf p. 268 von Bd. 20 dieser Annalen abgedruckte Notiz schrieb, sonst hätte ich selbstverständlich davon Mittheilung gemacht.

Giessen, Frühjahr 1884.

#### IV. Ueber den Einfluss der Dichtigkeit auf die Viscosität tropfbarer Flüssigkeiten; von E. Warburg und J. Sachs.<sup>2)</sup>

Schon Coulomb<sup>3)</sup>, welchem man die ersten grundlegenden Versuche über die Reibung tropfbarer Flüssigkeiten verdankt, hat sich die Frage vorgelegt, ob dieselbe vom Druck abhängig sei. Er liess eine Scheibe in Wasser unter der Glocke der Luftpumpe drehende Schwingungen ausführen und fand die Dämpfung dieser Schwingungen ungeändert, als er evacuirte. Coulomb schloss daraus, dass die Wasserreibung unabhängig vom Druck sei, ein Resultat, das durch die Versuche von Poiseuille u. A. bestätigt wurde.

Bei einer Untersuchung über die Reibung der Kohlensäure<sup>4)</sup> hat sich indessen ergeben, dass die Viscosität der tropfbaren Kohlensäure bei 25,1° durch eine Druckerhöhung von etwa 70 auf 105 Atmosphären im Verhältniss von 628:800 vergrössert wird. Die Compressibilität der Kohlensäure ist unter diesen Umständen  $3140/10^6$ , etwa achtzehnmal so gross, als die des Aethers bei derselben Temperatur.

Aus der genannten Untersuchung scheint ferner hervorzugehen, dass die Aenderung der Viscosität mit dem Druck wesentlich bedingt ist durch die Dichtigkeitsänderung, welche die Druckänderung begleitet. Wenn nun bei anderen tropf-

1) Warburg, Pogg. Ann. 140. p. 367. 1870.

2) Auszug aus der Inauguraldissertation von Dr. J. Sachs.

3) Coulomb, Mém. de l'institut national an IX.

4) Warburg u. v. Babo, Wied. Ann. 17. p. 390. 1882.

baren Flüssigkeiten die Aenderung der Viscosität mit der Dichte von derselben Ordnung ist, wie für die tropfbare Kohlensäure, so erklärt sich einerseits, dass bei den bisherigen, innerhalb enger Druckgrenzen angestellten Versuchen mit anderen Flüssigkeiten eine Aenderung der Viscosität mit dem Druck nicht bemerkt wurde, ist aber andererseits ein sehr merklicher Einfluss des Druckes zu erwarten, wenn derselbe von 1 bis auf 100—150 Atmosphären gesteigert wird.

Da der zu der genannten Untersuchung benutzte Apparat erlaubte, innerhalb solcher Druckgrenzen zu arbeiten, so forderte ich Hrn. Lehramtspraktikanten J. Sachs auf, andere Flüssigkeiten der Untersuchung zu unterziehen.

Es wurden mit dem erwähnten Apparat, welcher in diesen Annalen<sup>1)</sup> ausführlich beschrieben ist, im Hinblick auf den veränderten Zweck einige Abänderungen vorgenommen.

Das Stickstoffmanometer wurde durch ein Blancke'sches Federmanometer ersetzt, dessen Genauigkeit hier hinreichte, und welches den Vortheil grösserer Bequemlichkeit bot.

Die Druckerhöhung wurde bei den neuen Versuchen durch eine mit Glycerin oder Wasser gefüllte hydraulische Presse hervorgebracht. Der Druck wirkte unmittelbar auf Glycerin in dem äusseren Theile einer Vorlage und pflanzte sich auf den inneren, mit der Versuchssubstanz gefüllten Theil fort, wobei die beiden Theile durch Quecksilber von einander getrennt waren.

Endlich war bei den Versuchen mit der Kohlensäure der gläserne Haupttheil *defg* des Apparates<sup>2)</sup> durch ein Stückchen Kautschukschlauch *i* mit dem Kopftheil verbunden. Da bei den hier beabsichtigten Versuchen mit Aether und Benzol die Anwendung des Kautschuks unstatthaft war, so musste eine andere Verbindung gewählt werden. Kork hielt nicht dicht, und es war nicht möglich, durch

1) Warburg u. v. Babo, Wied. Ann. 17. p. 393. 1882. Taf. III Fig. 2 u. 2A.

2) l. c. Taf. III Fig. 2.

einen Ueberdruck von aussen das Quecksilber in der Messröhre zu heben. Es gelang schliesslich, den Kork dicht zu machen durch eine mit chromsaurem Kali versetzte Leimschicht, welche, auf die Endflächen warm aufgetragen, nach Belichtung durch die Sonne sich undurchdringlich und unlöslich erwies.

Nachdem die Brauchbarkeit des Apparates durch Verificirung einiger bekannter Reibungsindices erwiesen war, wurde zu den eigentlichen Versuchen übergegangen. Es wurden fünf Capillaren benutzt, deren Radien 0,00618; 0,00523; 0,00521; 0,00454; 0,00394 cm und deren Längen bezüglich 8; 12; 7,93; 7,42; 6,33; 6,19 cm betrugen.

Die Gültigkeit des Poiseuille'schen Gesetzes wurde, wie in der Arbeit über die Kohlensäure, durch Beobachtung zwischen vier Marken, d. h. bei verschiedenen Druckdifferenzen an den Enden der Capillare controlirt.

Indem wir bezüglich der ausführlichen Mittheilung der Versuchsergebnisse auf die Dissertation verweisen, beschränken wir uns hier auf die Angabe der definitiven Resultate. Wir setzen den Reibungsindex  $\mu$ :

$$\mu = \mu_0 (1 + \alpha \cdot p),$$

wo  $\mu$  den Reibungsindex bei Atmosphärendruck,  $p$  den zugefügten Ueberdruck bedeutet, indem als Einheit des Ueberdruckes der Druck von 1 kg auf den Quadratcentimeter (Einheit des Blanche'schen Manometers) gilt. Setzen wir ferner:

$$\mu = \mu_0 (1 + \beta \cdot s),$$

wo  $s$  die durch den Ueberdruck erzeugte Compression bedeutet, so ist:

$$\beta = \frac{\alpha}{z},$$

wenn  $z$  die Zusammendrückbarkeit ist.

Da die totale Aenderung der Strömungszeit durch den Druck im günstigsten Fall bis zu 14% der Strömungszeit bei dem Ueberdruck 0, im ungünstigsten Fall nur bis zu  $2\frac{1}{2}\%$  anstieg, und ausserdem die Versuche durch mancherlei Fehlerquellen beeinflusst wurden, so ist die Genauigkeit, mit welcher die Grösse  $\alpha$  bestimmt werden konnte, im allgemeinen nur eine geringe, obgleich eine grössere Zahl von Ver-

suchsreihen erhalten wurde. In der folgenden Tabelle sind für die drei untersuchten Substanzen — Aether, Benzol, Wasser — die Werthe von  $\alpha$  verzeichnet, welche als die wahrscheinlichsten aus den Versuchen hervorgehen dürften. Zur Berechnung von  $\beta$  wurden die Werthe von  $z$  für Aether und Benzol aus den Versuchen von Amagat<sup>1)</sup>, für Wasser aus den Versuchen von Grassi<sup>2)</sup> entnommen; durch Interpolation finden wir für 20°, wenn als Einheit des Druckes der Druck von 1 kg auf den Quadratcentimeter gilt, die in die Tabelle aufgenommenen Werthe von  $z$ . Die auf die Kohlensäure bezüglichen Zahlen sind der eingangs citirten Arbeit entnommen. Die Angaben über die kritischen Temperaturen  $t_1$  sind für Kohlensäure nach Andrews, für Aether und Benzol nach Sajotschewsky<sup>3)</sup> gemacht. Endlich sind die den Versuchstemperaturen entsprechenden reducirten Temperaturen  $\theta$  verzeichnet, welche man nach v. d. Waals durch Division der absoluten Versuchstemperaturen durch die absoluten kritischen Temperaturen erhält.

	Kohlensäure $t = 25,1^\circ$ $t_1 = 30,9$ $\theta = 0,98$	Aether $t = 20^\circ$ $t_1 = 190$ $\theta = 0,63$	Benzol $t = 20^\circ$ $t_1 = 280,6$ $\theta = 0,53$	Wasser $t = 20^\circ$
$\alpha \cdot 10^6$	7470	730	930	-170
$z \cdot 10^6$	3040	173	91	45
$\beta$	2,5	4,2	10,2	- 3,8

Die Viscosität nimmt nach dieser Tabelle mit zunehmender Dichte für Kohlensäure, Aether, Benzol zu, für Wasser ab.<sup>4)</sup> Für die drei ersten Flüssigkeiten entspricht einer grösseren reducirten Versuchstemperatur jedesmal ein kleineres  $\beta$ .

Eine eigenthümliche Erscheinung wurde bei den Ver-

1) Amagat, Ann. de chim. et de phys. (5) 11. p. 520. 1877. Beibl. 1. p. 488.

2) Grassi, Wüllner's Lehrbuch der Experimentalphys. 1. p. 230.

3) W. Sajotschewsky, Beibl. 3. p. 742. 1879.

4) Im Einverständniss mit Hrn. Prof. Röntgen bemerke ich, dass dieser schon im Jahre 1881 mir Versuche mitgetheilt hat, aus denen eine Abnahme der Viscosität mit zunehmendem Druck für Wasser hervorgeht.

suchen bemerkt und beim Wasser genauer studirt, da sie die Untersuchung dieser Substanz wegen der Kleinheit der Wirkung, die der Druck hier ausübt, zuerst sehr erschwerte. Es zeigte sich nämlich die Strömungszeit bei Atmosphärendruck dauernd verändert, und zwar beim Wasser verkleinert, wenn vorher ein grösserer Druck angewandt war. Bei Wasser, das möglichst luftfrei gemacht oder mit Kohlensäure oder Ammoniak gesättigt war, zeigte sich diese Erscheinung kaum, bei Schwefelwasserstoffwasser in hohem Grade. Wenn nicht eine Fehlerquelle übersehen ist, so würde danach die Constitution gewisser, bei Atmosphärendruck gesättigter Gaslösungen durch eine vorübergehende Druckerhöhung eine permanente Aenderung erfahren, d. h. eine Aenderung, welche nicht verschwindet, wenn die Druckerhöhung aufgehoben wird. Ehe indessen diese Thatsache durch andere Versuche bestätigt ist, möchten wir sie nicht als verbürgt hinstellen.

Freiburg i. Br., 23. Febr. 1884.

#### V. Zur Wärmeleitungsfähigkeit des Turmalins; von Franz Stenger.

(Hierzu Taf. VII Fig. 2—4.)

Theoretische Ueberlegungen über die Ursachen der pyroelectrischen Erscheinungen führten S. P. Thompson und O. J. Lodge<sup>1)</sup> auf die Vermuthung, dass Turmalin in der Richtung der Hauptaxe eine unilaterale Leitung für Wärme zeigen werde, dass also das Leitungsvermögen in der Richtung vom analogen Pol zum antilogen ein anderes sei, als in der entgegengesetzten. Zur Verification ihrer Annahme führten sie Versuche nach zwei verschiedenen Methoden aus. Einmal beobachteten sie nach der Sénarmont'schen Methode die Curven, bis zu welchen die auf den parallel der Axe

1) S. P. Thompson u. O. J. Lodge, Phil. Mag. (5) 8. p. 18. 1870. Beibl. 4. p. 108.



geschnittenen Krystallplatten erzeugte dünne Wachsschicht schmolz, wenn durch einen heissen Draht ein Punkt der Platte erwärmt wurde; sie fanden dann, wie sie erwartet hatten, dass die entstandenen Curven keine regelmässig ausgebildeten Ellipsen waren, sondern dass sie von dem erwärmten Punkte gegen den analogen Pol hin verlängert erschienen.

Derartige Beobachtungen ergaben im Mittel das Verhältniss der in der Hauptaxe liegenden Halbaxen der Curve  $= \frac{100}{139}$ .

Bei einer zweiten Reihe von Versuchen wurde eine senkrecht zur Axe geschnittene Turmalinplatte zwischen zwei Glasröhren eingekittet, in das obere Rohr eine bestimmte Menge Quecksilber gegossen, in das untere Wasserdampf eingeblasen. Beobachtet wurde die Zeit, die verfloss, bis das Quecksilber sich um eine bestimmte Zahl von Graden erwärmt hatte.

Auch nach dieser Methode wurde eine Verschiedenheit des Leitungsvermögens gefunden, je nach der Richtung, in der die Turmalinplatte vom Wärmestrom durchsetzt wurde, und zwar verhielten sich die Mittelwerthe der Zeiten, die zu einer gleichen Temperaturerhöhung erforderlich waren, wie 100 zu 119.

Die wenigen Beobachtungen, welche Thompson und Lodge angestellt haben, zeigen untereinander so grosse Abweichungen, dass aus diesen Versuchen eine unilaterale Leitung mit Sicherheit nicht gefolgert werden kann; vor allen Dingen hätte man sich ausserdem darüber Gewissheit verschaffen müssen, ob die benutzten Platten völlig homogen waren, ob also nicht eine Anzahl von Krystallindividuen derartig durcheinander gewachsen war, dass auf einer zur Axe senkrechten Schnittfläche analoge und antiloge Pole verschiedener Krystalle nebeneinander lagen. Es war daher wünschenswerth, durch Versuche nach einer besseren Methode zu entscheiden, ob eine solche abnorme Wärmeleitung dem Turmalin zukommt oder nicht.

Die zu dem Zwecke von mir gemachten Beobachtungen wurden an zwei senkrecht zur Axe geschnittenen Krystallplatten ausgeführt. Die eine, etwa 5,8 mm dick, war aus

einem dem hiesigen mineralogischen Institute gehörigen und mir von Hrn. Prof. Bücking zur Verfügung gestellten Krystalle aus Brasilien geschnitten; die zweite, etwa 3,2 mm dick, stammt aus einem Geschiebestück von Ceylon. Beide liessen keine Spur von stängeligem Gefüge erkennen, und eine genaue pyro-electrische Untersuchung nach der von Kundt<sup>1)</sup> angegebenen Bestäubungsmethode zeigte, dass in der That beide Platten absolut homogen waren; eine der beiden Flächen der auf etwa 65° erhitzten und während der Abkühlung bestäubten Platte erschien völlig gelb, die andere völlig roth gefärbt.

Die Untersuchung des Wärmeleitungsvermögens geschah nach einer Methode, die der von F. Weber<sup>2)</sup> für Flüssigkeiten angewandten nachgebildet ist. Man lässt die Krystallplatte und die in einem auf ihr ruhenden Kupfercylinder angebrachte Löthstelle eines Thermoelementes die Temperatur des Arbeitszimmers annehmen, bringt dann die untere Fläche der Platte durch Contact mit glatten Eisflächen auf die Temperatur 0° und beobachtet den Temperaturverlauf des Thermoelementes mit Spiegel und Scala an einem empfindlichen Galvanometer. Das von mir benutzte (Fig. 2, G) hatte geringen Widerstand (0,8 S.-E., wenn, wie im Folgenden, alle Windungen hintereinander geschaltet waren), astatistisches Nadelsystem und kräftige Dämpfung.

Die eine Löthstelle *a* des Thermoelementes — ein etwa 4 mm hoher Kupfercylinder, in dessen obere Fläche ein Platindraht und ein Eisendraht eingelöthet waren — befand sich, um sicheren Contact zu erhalten, in einer auf der Turmalinplatte *f* befindlichen dünnen Quecksilberschicht *b*; die beiden Löthstellen, welche der Eisen- und der Platindraht mit den nach dem Galvanometer führenden Drähten bildeten, befanden sich in einem Glasgefäss *c* mit Terpentinöl, das in einen mit Watte ausgekleideten hölzernen Kasten eingesetzt war, um die Temperatur möglichst constant zu erhalten. Die Ablesung der Temperaturen des Terpentinöls geschah an einem Geissler'schen Thermometer, an dem man ein Hundertel eines Grades ablesen konnte.

1) Kundt, Wied. Ann. 20. p. 592. 1883.

2) Fr. Weber, Wied. Ann. 10. p. 103. 1880.

Das von F. Weber angewandte Verfahren, beim Beginn eines Versuches die untere Fläche der untersuchten Substanz auf die Temperatur  $0^{\circ}$  zu bringen und darauf zu erhalten, dadurch dass er die Flüssigkeitslamelle mit den beiden sie umhüllenden Metallmassen und die darauf befindliche Löthstelle direct auf eine glatte Eisfläche setzte, konnte ich nicht anwenden. Es war eben das Gewicht von Krystallplatte und Kupfercylinder zu gering, um das auf dem Eise gebildete Schmelzwasser zu verdrängen und einen beständigen Contact mit dem Eise zu sichern. Ich habe es daher vorgezogen, die Turmalinplatte während der Beobachtungsreihen unverändert in ihrer Lage im Raume zu lassen und durch eine besondere Vorrichtung die planparallele Eisplatte *d* ihr von unten her zu nähern und so fest anzupressen, dass das Schmelzwasser beständig am Umfang der Turmalinplatte herausgetrieben wurde.

Zu dem Ende war die Platte *f* mit ein wenig Wachs und Colophonium auf eine mit einem kreisförmigen Loch von entsprechender Grösse versehene Ebonitplatte *e* und diese auf ein kurzes Glasrohr *g* aufgekittet; das Glasrohr wurde in einem Stativ festgekllemmt.

Vertical unter der Platte befand sich der eine Schenkel eines communicirenden Rohres *h*, der mit dem zweiten längeren Schenkel durch ein dünneres mit einem Hahn versehenes Zwischenstück verbunden war. Im kürzeren Schenkel konnte sich mit leichter Reibung ein Probirglas *i* verschieben, auf dessen oberes unter dem Turmalin befindliches Ende eine Glasplatte *k* gekittet war. Das ganze Rohr wurde mit Quecksilber gefüllt, sodass die Glasplatte etwa 2 cm unter der Krystallfläche sich befand, sodann der Hahn geschlossen und der längere Schenkel bis zum Rande mit Quecksilber gefüllt. Sollte nun die Turmalinplatte an ihrem unteren Ende auf  $0^{\circ}$  abgekühlt werden, so wurde auf die Glasplatte ein planparalleles Stück Eis (etwa 1 cm dick) gelegt und der Hahn geöffnet; das Quecksilber im längeren Schenkel hob dann Probirrohr nebst Eisplatte nach oben und presste sie gegen den Krystall an.

Um eine Vergleichung der aus den einzelnen Versuchen

folgenden Resultate ermöglichen zu können, habe ich die Temperatur des Zimmers möglichst constant erhalten; wurde die Temperatur im Laufe des Nachmittags zu hoch, so unterbrach ich die Beobachtungen und nahm sie erst am nächsten Tage wieder auf. Es wurde ausserdem mit jeder Messung so lange gewartet, dass man sicher sein konnte, dass die Krystallplatte in ihrer ganzen Ausdehnung dieselbe Temperatur besass, wie  $a$  und die Luft des Zimmers.

Vor und nach jedem Versuch vergewisserte ich mich ferner, dass keine electromotorische Kraft ausser der durch die Temperaturdifferenz zwischen dem Kupfercylinder und den im Terpentinöl befindlichen Löthstellen bedingten vorhanden war. Endlich zeigte sich, dass die Eisplatte sich so schnell dem Turmalin näherte, dass vor der Berührung ein Sinken der Temperatur von  $a$  nicht merklich war.

Der einzelne Versuch wurde danach in folgender Weise ausgeführt: Zuerst beobachtete ich die Ruhelage des Nadelsystems bei ungeschlossenem Stromkreise, stellte sodann unter Ausschliessung der drei Löthstellen kurzen Schluss her, um mich zu überzeugen, dass keine electromotorische Kraft ausserhalb des Thermoelementes existirte; darauf wurde die Temperatur des Terpentinöls abgelesen und nach Entfernung des kurzen Schlusses die Einstellung der Magnetnadeln beobachtet. Sodann wurde die Eisplatte auf die Glasplatte des communicirenden Röhrensystems gelegt, der Hahn geöffnet und mit Hülfe einer Secundenuhr vom Moment der Berührung von Eis- und Turmalinplatte an der Temperaturverlauf des Kupfercylinders am Fernrohr beobachtet. Um aus den für die verschiedenen aufeinander folgenden Zeitpunkte gemachten Ablesungen die zugehörigen Temperaturen in Scalentheilen ausgedrückt zu erhalten, wurde  $a$  sodann in Eis gepackt und die Einstellung notirt. Den Schluss jedes Versuches machte die Controle, ob Temperatur des Terpentinöls, Einstellung der Nadel bei ungeschlossenem Strome und bei kurzem Schlusse dieselben waren, wie zuvor.

Auf diese Weise wurde für die beiden Krystallplatten eine Reihe von Versuchen gemacht, und zwar wurde bald das analoge, bald das antilige Ende der Krystalle mit der

Eisplatte zur Berührung gebracht. Die Resultate stellte ich graphisch dar durch Curven, deren Abscissen die Zahl der Secunden vom Beginn des Contacts der Turmalinplatte mit dem Eise an gerechnet sind und deren Ordinaten die zugehörigen Temperaturen von  $a$  in Scalentheilen ausgedrückt bilden. Dabei war die Empfindlichkeit des Galvanometers so gewählt, dass einer Temperaturdifferenz von einem Grad etwa 60 Scalentheile entsprachen.

Von den so erhaltenen Curven wurde für die weitere Betrachtung nur das mittlere Stück benutzt; das erste Stück zeigt nothwendig einen weniger regelmässigen Verlauf, das letzte ist ebenfalls unbrauchbar, weil die Temperaturänderung in den Endstadien des Versuches langsam vor sich geht, und daher die Beobachtungsfehler grösser werden. Für die dickere Platte berücksichtigte ich für die Constructionen das Stück der Curven zwischen den Abscissen  $t = 20$  Secunden und  $t_1 = 200$  Secunden; für die dünnere, wo der Temperaturverlauf sich rascher vollzieht, von  $t = 20$  bis  $t_1 = 150$  Secunden.

Infolge der unvermeidlichen Schwankungen in der Temperatur des Arbeitszimmers sind die Anfangsordinaten der den einzelnen Versuchen entnommenen Temperaturcurven nicht gleich, sondern variiren etwas; die grösste Differenz, die ich zugelassen habe, beträgt 3 Proc. Um nun aus allen Versuchen für eine und dieselbe Lage einer der Platten den wahrscheinlichen Temperaturverlauf zu erhalten, habe ich für jede Curve alle Ordinaten in demselben Verhältniss vergrössert oder verkleinert derart, dass für  $t = 20$  Secunden die Ordinaten aller Curven einen und denselben Werth erhielten. Für die späteren Zeitpunkte werden dann die einzelnen Curven etwas verschiedene Gestalt besitzen, und man wird für die gewählte Anfangstemperatur die wahrscheinlichste Temperaturcurve erhalten, wenn man als Ordinaten derselben die Mittelwerthe der Ordinaten der in der angegebenen Weise reducirten Curven wählt. Es ist dieses Verfahren nicht streng richtig; da indess die Versuche zeigten, dass die verschiedenen Anfangstemperaturen entsprechenden Curven sich einander mehr und mehr nähern, wenn man zu grösseren Abscissen fortschreitet, und ausserdem die Abweichungen

der einzelnen Curven voneinander gering sind, kann der begangene Fehler nur unbedeutend sein.

Was die derselben Lage einer Platte entsprechenden, auf dieselbe Anfangstemperatur reducirten Curven betrifft, beschränke ich mich auf die Angabe, dass die Abweichungen derselben sich auf höchstens 3 Proc. belaufen. Ich füge dagegen in den Figuren 3 und 4 die auf die angegebene Weise für die beiden Platten erhaltenen wahrscheinlichsten Temperaturcurven bei; darin ist mit *A* die Linie bezeichnet, die man erhält, wenn der Wärmestrom vom analogen zum antilogen Pol geht, mit *B* die der entgegengesetzten Richtung entsprechende.

Wie man sieht, fallen für jede der beiden Platten die Curven *A* und *B* sehr nahe zusammen; die grösste Differenz zwischen zwei zusammengehörigen Ordinaten ist etwa 1 Proc., also jedenfalls nicht grösser als die Differenzen, die sich für verschiedene Versuche bei derselben Lage der Platte ergeben hatten.

Man kann daraus also den Schluss ziehen, dass eine unilaterale Leitung der Wärme im Turmalin entweder nur einen sehr geringen Betrag erreicht oder, was mir wahrscheinlicher ist, gar nicht vorhanden ist.

Phys. Inst. der Univ. Strassburg i. E., Mai 1884.

## V. Die Ausdehnung der Krystalle durch die Wärme; von Eug. Blasius.

(Hierzu Taf. VII Fig. 5—8.)

Die Theorie von der Ausdehnung der Krystalle durch die Wärme ist von sehr grosser Bedeutung für die Krystallographie, ihre Behandlung ist aber wegen der Rechnungen, die dabei angewandt wurden, keine leichte gewesen, und obwohl Gelehrte, wie F. E. Neumann<sup>1)</sup>, Grailich und v. Lang<sup>2)</sup>

1) F. E. Neumann, Pogg. Ann. 27. p. 240. 1833.

2) Grailich u. v. Lang, Wien. Ber. 33. p. 369. 1859.



und C. Neumann<sup>1)</sup> sich mit dem Gegenstande beschäftigt, war es möglich, dass bis in die neueste Zeit recht unklare und verkehrte Meinungen darüber vorkamen. Das Verdienst L. Fletcher's<sup>2)</sup> ist es, in den letzten Jahren nicht nur auf die dunkeln Punkte der Theorien aufmerksam gemacht, sondern auch die ganze Lehre aufs neue aufgebaut und erweitert zu haben.

Die einzige Voraussetzung, die man in dieser Theorie macht, ist nach unseren heutigen Anschauungen über die Krystalle eine sehr sichere, nämlich die, dass alle Geraden des Krystalles (alle Kanten) Gerade bleiben, und dass parallele Gerade parallel bleiben, wenn die Temperatur sich ändert. Diese Grundlage ist ausserordentlich einfach, dagegen sind die Rechnungen schon ziemlich complicirt.

Da die Verhältnisse bei der Ausdehnung der Krystalle durch die Wärme, sowie wir sie jetzt kennen, in der That der Auffassung manche Schwierigkeiten darbieten, ist es angebracht, jede Bestätigung einer bezüglichen Theorie anzuführen, um so mehr, wenn die Methode, wie die im Folgenden gegebene, es erlaubt, neue Resultate zu den in einfacher Weise abgeleiteten bekannten Thatsachen hinzuzufügen.

Die Grundlage der ganzen Lehre von der Ausdehnung der Krystalle durch die Wärme ist, wie oben erwähnt, die Annahme, dass alle Punkte, die bei einer Temperatur in einer Geraden liegen, auch bei jeder anderen Temperatur in einer Geraden liegen, und dass parallele Gerade für alle Temperaturen parallel bleiben.

Daraus folgt:

1. Die verschiedenen Configurationen, in die ein Krystall bei Aenderung der Temperatur übergeht, sind alle untereinander affin.

Für den Geometer ist mit diesem Satze die ganze Theorie von der Ausdehnung der Krystalle durch die Wärme gegeben. Dass auf denselben nicht schon früher hingewiesen

1) C. Neumann, Pogg. Ann. 114. p. 492. 1861.

2) L. Fletcher, Phil. Mag. 9. p. 81. 1880. Uebersetzt: Groth's Zeitschr. f. Kryst. 4. p. 337. 1880. Phil. Mag. 16. p. 275, 344, 412. 1883. Uebersetzt: Groth's Zeitschr. f. Kryst. 8. p. 455. 1884.

wurde, liegt daran, dass sich wenige Geometer mit krystallographischen Fragen und wenige Krystallographen mit neuerer Geometrie beschäftigen. Aus demselben Grunde sehe ich mich im Folgenden zuweilen genöthigt, auf beiden Gebieten elementare Erläuterungen zu geben. Da aber unsere Methode die Anwendung auch solcher Sätze gestattet, die nicht zu den allerleichtesten der Geometrie gehören, so muss ich es allerdings auch oft bei einer Angabe der Stelle bewenden lassen, wo der Beweis gegeben ist.

Endlich möchte ich noch bemerken, dass sogar die Bewegungen solcher Systeme, die sich in affine Systeme verwandeln, Bearbeiter gefunden hat, freilich ohne dass dabei auf die Ausdehnung der Krystalle Bezug genommen wurde. Hr. Durrande<sup>1)</sup> hat diesen Fall analytisch, Hr. Burmester<sup>2)</sup> synthetisch behandelt. Ich fand die betreffenden Abhandlungen erst, nachdem ich mit meiner Arbeit fertig zu sein glaubte.

Wir haben es also bei unserem Thema mit der merkwürdigen Erscheinung zu thun, dass fertige mathematische Entwicklungen einer einfachen Anwendung auf die Beantwortung ziemlich verwickelter praktischer Fragen harren.

Der Einfachheit halber fangen wir mit der Ausdehnung in der Ebene an. Die Sätze gelten für alle ebenen Krystallflächen.

#### I. Die Ausdehnung in der Ebene.

2. Nach der Lehre von den affinen Ebenen verwandeln sich bei einer Ausdehnung Ellipsen in Ellipsen, Hyperbeln in Hyperbeln und Parabeln in Parabeln. Ein auf die Krystallfläche gezeichneter Kreis verwandelt sich demnach im allgemeinen in eine Ellipse. Die Axen der letzteren entsprechen als conjugirte Durchmesser zwei aufeinander senkrecht stehenden Durchmessern des Kreises, sie sind die Linien der grössten und kleinsten Ausdehnung, und man hat sie in einer

1) Durrande, Compt. rend. 74. p. 1243. 1872; 75. p. 1177. 1872; 78. p. 1036. 1874. Ann. scient. de l'école normale supérieure (2) 2. p. 61. 1873.

2) Burmester, Zeitschr. f. Math. u. Phys. 23. p. 108. 1878.

Zeit, als man ihre Bedeutung überschätzte, „thermische Axen“ genannt.

3. Denkt man sich einen Kreis aus der Krystallfläche herausgeschnitten und seinen Mittelpunkt festgehalten, so verwandelt sich der Strahlenbüschel  $S$ , der aus allen durch den Mittelpunkt gehenden Strahlen besteht, in einen zu  $S$  projectivischen Strahlenbüschel  $S_1$ , wie wir ebenfalls aus der Theorie der affinen Ebenen wissen.

4. Von dem Strahlenbüschel  $S_1$  fallen höchstens zwei Strahlen auf die entsprechenden Strahlen des Büschels  $S$ . Wirken nur die durch Temperaturänderung hervorgebrachten inneren Kräfte, so sind, wie Fletcher bewiesen hat, die zwei Strahlen reell, und Fletcher nennt dieselben „atropische“ Linien.

Da wir durch Messung der Winkel des Krystalles erst bei einer Temperatur, dann bei der anderen nur wissen, in welchen Strahlenbüschel  $S_1$  der Strahlenbüschel  $S$  übergegangen ist, aber nicht, wie wir den Büschel  $S_1$  zu  $S$  stellen müssen, um anzudeuten, dass nur innere Kräfte gewirkt haben, so ist auch nichts über die Lage der atropischen Linien aus solchen Winkelmessungen zu erfahren.

5. Um die atropischen Linien wirklich zu finden, ist es nöthig, dass man die Lage eines Strahles von  $S$  im Raum, bei einer Temperatur beobachtet, dann den Krystall ohne Einwirkung äusserer Kräfte sich ausdehnen lässt, und schliesslich den Winkel misst, den die neue Lage des Strahles mit der früheren einschliesst. Dadurch wäre die Lage des Strahlenbüschels  $S_1$  gegen  $S$  völlig bestimmt, und infolge dessen auch die atropischen Linien.

Da solche Messungen, wie die beschriebene, noch von niemand gemacht sind, steht es uns frei, den Strahlenbüschel  $S_1$  zu dem Büschel  $S$  zu legen, wie wir wollen. Es gilt dann der oben schon erwähnte Satz, dass höchstens zwei Strahlen des einen Büschels auf die entsprechenden Strahlen des anderen fallen. Legen wir  $S_1$  so auf  $S$ , dass irgend ein bestimmter Strahl  $a$  auf den ihm entsprechenden Strahl  $a_1$  zu liegen kommt, so haben die Büschel  $S$  und  $S_1$  im allgemeinen noch einen Strahl  $b$ , resp.  $b_1$  entsprechend gemein,

und es folgt daraus, da der Winkel, den  $a$  und  $b$  einschliessen, derselbe sein muss wie der, den  $a_1$  und  $b_1$  einschliessen:

6. Zu irgend einem Strahl  $a$  lässt sich im allgemeinen ein und nur ein Strahl  $b$  finden, dessen Neigung zu  $a$  vor der Ausdehnung dieselbe ist, wie nachher.

Diese Verhältnisse lassen sich am leichtesten übersehen, wenn wir Gebrauch machen von einer der wichtigsten Eigenschaften der projectivischen Strahlenbüschel, nämlich derjenigen, dass sie sich in perspectivische Lage bringen lassen. Sei  $a$  die Punktreihe, deren Schein die Büschel  $S$  und  $S_1$  beide sind. Legen wir dann durch die Punkte  $S$  und  $S_1$  irgend einen Kreis, der  $u$  schneidet, und verbinden die Schnittpunkte  $A$  und  $B$  desselben mit den Punkten  $S$  und  $S_1$ , so entsprechen den Strahlen  $SA$  und  $SB$  beziehungsweise die Strahlen  $S_1A$  und  $S_1B$ , zugleich muss der Winkel  $ASB$  gleich dem Winkel  $AS_1B$  sein.

7. Daraus lernen wir zu irgend einem Strahl  $a$  des ersten Büschels denjenigen Strahl zu construiren, der vor und nach der Ausdehnung mit  $a$  denselben Winkel einschliesst. Wir brauchen nur durch  $S, S_1$  und den Punkt  $A$ , in dem  $a$  die Gerade  $u$  schneidet, einen Kreis zu legen, und  $S$  mit dem zweiten Schnittpunkte  $B$  des Kreises mit  $u$  zu verbinden. Die Gerade  $SB$  ist die gesuchte.

8. Um die „thermischen Axen“, d. h. die Geraden, die sowohl vor wie nach der Ausdehnung aufeinander senkrecht stehen, zu finden, ist ein Kreis durch  $S$  und  $S_1$  zu legen, dessen Mittelpunkt  $M$  auf  $u$  liegt (Fig. 5). Verbinden wir dann die Schnittpunkte  $A$  und  $B$  des Kreises und der Geraden  $u$  sowohl mit  $S$  wie mit  $S_1$ , so sind  $SA, SB$ , resp.  $S_1A$  und  $S_1B$  die thermischen Axen. Der Mittelpunkt  $M$  wird gefunden, indem man in dem Halbierungspunkte der Strecke  $SS_1$  auf dieser ein Loth errichtet, welches  $u$  in  $M$  schneidet.

Statt nun wie bisher nur zwei Phasen der Aenderung unseres Systems zu beobachten, ziehen wir jetzt eine dritte Phase hinzu und untersuchen also den Fall von zwei Ausdehnungen. Der Strahlenbüschel  $S$  möge durch die eine Ausdehnung in  $S_1$ , durch die andere in  $S_2$  übergeführt werden.

Wir können  $S$  und  $S_1$  wie oben in perspectivische Lage zu einer und derselben Punktreihe  $u$  bringen.  $S_2$  ist dann projectivisch auch zu  $u$  und lässt sich ebenfalls zu der Punktreihe  $u$  in perspectivische Lage bringen. Durch die Centra der drei Büschel  $S$ ,  $S_1$  und  $S_2$  kann ein einziger Kreis gelegt werden. Verbindet man dann die Punkte  $A$  und  $B$ , in denen der Kreis  $u$  schneidet, mit den Punkten  $S$ ,  $S_1$  und  $S_2$ , so sind die Winkel  $ASB$ ,  $AS_1B$  und  $AS_2B$  alle gleich, und die Strahlen  $SA$  und  $SB$  sind die einzigen im Büschel  $S$ , die nach beiden Ausdehnungen dieselbe Neigung gegeneinander haben als vorher; sie sind daher die einzigen Linien, die für beide Ausdehnungen atropisch sein könnten. Es folgt:

9. Bei zwei Ausdehnungen des Systems gibt es nur zwei Linien, die nach beiden Ausdehnungen dieselbe Neigung zu einander haben wie vorher. Ferner:

10. Sind bei zwei Ausdehnungen die atropischen Linien dieselben, so müssen die thermischen Axen bei den beiden Ausdehnungen verschiedene sein. Sind die thermischen Axen bei zwei Ausdehnungen dieselben, so müssen die atropischen Linien für diese Ausdehnungen verschieden sein. Eine Ausnahme von diesem Satz ist der Fall, in welchem die atropischen Linien selbst die thermischen Axen sind.

Haben wir es nicht mit drei Phasen, sondern mit beliebig vielen zu thun, und sollen die atropischen Linien immer dieselben sein, so liegen alle Mittelpunkte der Strahlenbüschel  $S_1, S_2, S_3$  etc., in die der Strahlenbüschel  $S$  übergeht, wenn man die Strahlenbüschel alle in perspectivische Lage zu einer Punktreihe  $u$  gebracht hat, auf der Peripherie eines Kreises  $K$ .

11. Betrachten wir dann unter derselben Voraussetzung, dass die atropischen Linien immer dieselben sein sollen, stetige Aenderungen des Systems, so muss, wenn wir die verschiedenen Phasen des Strahlenbüschels  $S$  in perspectivische Lage zu einer und derselben Punktreihe bringen, das Centrum dieses Strahlenbüschels sich stetig auf dem Kreise  $K$  bewegen. Dann lässt sich auf folgende Weise die

Lage der thermischen Axen in jedem Moment der stetigen Aenderung des Systems angeben. Man sucht den Kreis  $K$ , der durch die beiden sehr nahe aneinander liegenden Punkte  $S$  und  $S_1$  auf  $K$  geht, und dessen Mittelpunkt auf der Punktreihe  $u$  liegt. Im Grenzfalle (Fig. 6) wo  $S_1$  mit  $S$  zusammenfällt, construirt man die Tangente in  $S$  und errichtet in  $S$  auf dieser eine Normale, bis letztere  $u$  in  $M_1$  schneidet, d. h. einfacher, man verlängert den durch  $S$  gehenden Radius  $MS$  von  $K$  bis zum Schnitte  $M_1$  mit  $u$  und beschreibt mit dem Radius  $M_1S$  einen Kreis  $K_1$ . Dieser schneidet  $u$  in zwei Punkten  $X$  und  $Y$ , die, mit  $S$  verbunden, die thermischen Axen ergeben.

12. Für den Fall, dass bei stetiger Aenderung des Systems die atropischen Linien nicht immer dieselben bleiben, beschreibt das Centrum des Strahlenbüschels  $S$ , wenn wir wieder alle seine Phasen in perspectivische Lage zu einer Punktreihe  $u$  bringen, nicht mehr, wie eben, die Peripherie eines Kreises, sondern dasselbe bewegt sich auf irgend einer Curve. Diese Curve gibt uns zusammen mit der Punktreihe  $u$  ein Bild von den thermischen Aenderungen des Systems. Beispielsweise würde für eine jede Ebene eines regulären Krystalles, wo keine Winkeländerungen auftreten, und daher die verschiedenen Phasen des Strahlenbüschels  $S$  lauter projectivisch gleiche Büschel sind, die Curve aus einem einzigen Punkte bestehen. Für den Fall einer Symmetrieebene im rhombischen System, wo die beiden Axen zugleich constante thermische Axen und atropische Linien sind, ist die Curve ein Kreis, dessen Mittelpunkt auf  $u$  liegen muss.

13. Ist die für die Ausdehnung charakteristische Curve  $C$  gegeben und die Punktreihe  $u$ , so lässt sich auch wieder sehr leicht die Lage der thermischen Axen für jede Phase des Systems finden, wenn wir unter den thermischen Axen für eine Phase des Systems diejenigen thermischen Axen verstehen, die für die Aenderung von der betreffenden in eine unendlich benachbarte Phase gelten. Wir construiren wieder denjenigen Kreis  $K$ , der  $C$  in dem die Phase bestimmenden Punkte  $S$  tangirt, und dessen Mittelpunkt auf  $u$  liegt. Sind



$X$  und  $Y$  die Schnittpunkte von  $K$  mit  $u$ , so sind  $SX$  und  $SY$  die thermischen Axen.

14. Wir wenden uns jetzt zu der Aufgabe, durch Construction die atropischen Linien zu finden. Damit dieselben bestimmt seien, forderten wir oben (unter 5.) als nothwendige und hinreichende Angaben die beiden Phasen des Strahlenbüschels  $S$  und ihre gegenseitige Lage. Angenommen wurde noch, dass dieselben concentrisch seien. Wir verfahren nach Reye<sup>1)</sup> folgendermassen. Durch  $S$  werde ein Kreis gelegt (Fig. 7). Derselbe schneide drei Strahlen des ersten Büschels in  $A, B$  und  $C$ , die entsprechenden Strahlen des zweiten Büschels in  $A_1, B_1$  und  $C_1$ . Verbinden wir dann durch die Gerade  $u$  den Schnittpunkt von  $AB_1$  und  $A_1B$  mit dem Schnittpunkte von  $BC_1$  und  $B_1C$  und bringen  $u$  mit dem Kreise zum Durchschnitt in  $M$  und  $N$ , so sind  $SM$  und  $SN$  die gesuchten atropischen Linien.

Sollen für eine Reihe weiterer thermischer Veränderungen dieselben Krystalllinien atropische Linien bleiben, so ist nothwendig, dass sich (Fig. 8)  $AB_2$  und  $A_2B, AB_3$  und  $A_3B, AB_4$  und  $A_4B$  auf  $MN$  schneiden, wobei  $A_2, B_2, C_2, A_3, B_3, C_3$  und  $A_4, B_4, C_4$  die Schnittpunkte der Krystalllinien  $SA, SB, SC$  in ihren neuen Lagen nach jeder Ausdehnung mit dem oben erwähnten Kreis sind. Ebenso ist ferner nothwendig, dass sich auf  $MN$  schneiden  $BC_2$  und  $B_2C, BC_3$  und  $B_3C, BC_4$  und  $B_4C$ . Daraus folgt, dass der Strahlenbüschel  $A_{(B_1B_2B_3B_4)}$  perspectivisch zum Büschel  $B_{(A_1A_2A_3A_4)}$  ist. Da nun  $A_{(B_1B_2B_3B_4)}$  projectivisch ist zu  $S_{(B_1B_2B_3B_4)}$  und  $B_{(A_1A_2A_3A_4)}$  projectivisch ist zu  $S_{(A_1A_2A_3A_4)}$ , so ist endlich der Büschel  $S_{(A_1A_2A_3A_4)}$  projectivisch zu  $S_{(B_1B_2B_3B_4)}$ . Es folgt demnach der Satz:

15. Wenn die atropischen Linien bei einer Reihe von thermischen Aenderungen dieselben bleiben, so beschreiben die durch ihren Schnittpunkt  $S$  gehenden Strahlen  $SA, SB, SC$  etc. zu einander projectivische Strahlenbüschel.

Die entsprechend gemeinen Strahlen aller dieser Strahlen-

1) Reye, Geometrie der Lage. 2. Aufl., 1. p. 140—141. 1882.

büschel sind die atropischen Linien  $SM$  und  $SN$ , wovon man sich leicht an der Figur überzeugt.

Wir nennen mit Seydewitz die Punkte und Geraden eines Systems, welche auf die ihnen entsprechenden Gebilde eines affinen Systems fallen, Situationspunkte und Situationsgeraden. Dieselben hängen natürlich von der gegenseitigen Lage der beiden Systeme ab. Zu den Situationslinien zweier affinen Systeme gehört immer die unendlich ferne Gerade, ausserhalb dieser haben zwei affine Systeme im allgemeinen noch einen Punkt gemein und zwei durch diesen gehende Gerade. Nehmen wir an, dass ein System eine Wärmeausdehnung erfahre, ohne dass äussere Kräfte mit zur Bewegung beitragen, so müssen diejenigen beiden Linien, die ihre Lage im Raume beibehalten, also die beiden Situationslinien für diesen Fall die atropischen Linien Fletcher's sein. Verschieben wir dagegen willkürlich das System, nachdem es sich ausgedehnt hat, so können wir irgend zwei Gerade, die ihre Neigungen bei der Ausdehnung nicht verändert haben (vgl. oben 6.), zu Situationslinien machen. Da die atropischen Linien im Sinne Fletcher's in geometrischer Beziehung nichts vor den übrigen möglichen Situationslinien voraus haben, so lassen sich verschiedene von den obigen Sätzen, in denen die atropischen Linien vorkommen, erweitern, indem man an die Stelle der atropischen Linien die Situationslinien setzt. Dasselbe gilt auch für das Folgende.

Eine Punktreihe  $g$ , deren Träger einer atropischen Linie  $a_1$  parallel ist, verwandelt sich in eine zu ihr parallele und projectivische Punktreihe  $g_1$ . Verbinden wir einen beliebigen Punkt von  $g$  mit dem entsprechenden Punkte von  $g_1$ , und verlängern die Verbindungslinie  $v$  bis zum Schnittpunkt  $P$  mit der anderen atropischen Linie  $a_2$ , so gehen durch  $P$  die Verbindungsgeraden von drei einander entsprechenden Punkten der Geraden  $g$  und  $g_1$ ; nämlich die Gerade  $v$ , die atropische Linie  $a_2$  und eine Gerade parallel zu  $a_1$ , welche die unendlich fernen einander entsprechenden Punkte von  $g$  und  $g_1$  projicirt. Es folgt, dass  $g$  zu  $g_1$  perspectivisch liegt.  $P$  ist dabei das Centrum der Projection. Also:

16. Eine Punktreihe  $g$ , deren Träger einer atropischen Linie parallel läuft, verwandelt sich in eine dazu perspectivische und parallele Punktreihe, wobei das Centrum der Projection auf der anderen atropischen Linie liegt.

Wir betrachten wieder mehrere Ausdehnungen, bei denen die atropischen Linien dieselben sein sollen, und nehmen an, dass der Punkt  $A$  in allen Phasen dieser Ausdehnungen sich auf einer geraden Linie bewegen soll. Die Punktreihe  $g$ , die man durch  $A$  parallel zur atropischen Linie  $a_1$  legt, ist nach dem vorigen Satz perspectivisch zu allen Punktreihen  $g_1, g_2$  etc., in die sie bei den Ausdehnungen übergeht. Weil die Verbindungslinien des Punktes  $A$  mit seinen entsprechenden Punkten alle in  $v$  zusammenfallen, wie man aus der Voraussetzung sieht, so muss der Schnittpunkt von  $v$  mit der atropischen Linie  $a_2$  Mittelpunkt eines Strahlenbüschels sein, zu welchem alle Punktreihen  $g, g_1, g_2$  etc. perspectivisch liegen. Daraus folgt, dass jeder Punkt der Geraden  $g$  in allen Phasen der Ausdehnung sich auf einer Geraden des Raumes befinden muss. Dieselbe Beweisführung lehrt uns, dass das Gleiche für alle Punkte einer Punktreihe  $g$  der Fall ist, die durch den Punkt  $A$  parallel zur zweiten atropischen Linie gelegt wird. Durch jeden Punkt dieser letzten Geraden  $g$  legen wir nun Punktreihen parallel zur ersten atropischen Linie  $a_1$ . Auch alle Punkte dieser Punktreihen, d. h. alle Punkte der Ebene besitzen die Eigenschaft, die wir zuerst nur bei  $A$  vorausgesetzt haben, und es gilt der Satz:

17. Bewegt sich ein Punkt infolge thermischer Ausdehnungen, bei denen die atropischen Linien dieselben bleiben, auf einer Geraden, so beschreiben auch alle übrigen Punkte der Krystallebene gerade Linien.

Ein Parallelstrahlenbüschel verwandelt sich durch eine Ausdehnung wieder in einen Parallelstrahlenbüschel. Die unendlich ferne Gerade haben beide gemein, daher sind sie perspectivisch. Eine Gerade des ersten Büschels wird im Schnittpunkte der atropischen Linien von der entsprechenden Geraden des zweiten Büschels geschnitten, und daraus folgt,

dass die Punktreihe, deren Schein beide Strahlenbüschel sind, durch den besagten Punkt geht. Also:

18. Alle Strahlen eines Parallelstrahlenbüschels schneiden sich mit ihren entsprechenden Strahlen auf einer durch den Schnittpunkt der atropischen Linien gehenden Geraden.

Ein Strahlenbüschel  $S$ , dessen Mittelpunkt auf einer atropischen Linie  $a_1$  liegt, geht in einen Strahlenbüschel  $S_1$  über, dessen Mittelpunkt ebenfalls auf  $a_1$  liegt. Durch den Schnittpunkt  $P$  zweier entsprechender Strahlen legen wir eine Parallele  $g$  zur anderen atropischen Linie  $a_2$ , dann haben die projectivischen Punktreihen, in denen  $g$  von  $S$  und  $S_1$  geschnitten wird, drei Punkte entsprechend gemein; nämlich  $P$  und die beiden Schnittpunkte von  $g$  mit den beiden atropischen Linien, wovon der eine im Unendlichen liegt. Infolge dessen sind  $S$  und  $S_1$  perspectivisch zu  $g$ .

19. Ein Strahlenbüschel, dessen Centrum auf einer atropischen Linie liegt, und sein entsprechender Strahlenbüschel sind perspectivisch und Scheine einer Punktreihe, deren Träger der anderen atropischen Linie parallel läuft.

Ein einziger Strahl eines solchen Strahlenbüschels  $S$  bestimmt mit seinem entsprechenden Strahl die Punktreihe, zu der sowohl dieser Strahlenbüschel  $S$  als sein entsprechender perspectivisch sind. Nun sollen bei mehreren Ausdehnungen die atropischen Linien constant bleiben; ausserdem wollen wir annehmen, dass die verschiedenen Geraden des Systems, in die eine gewisse Gerade  $a$  des Krystalles übergeht, sich alle in einem Punkte des Raumes schneiden.

Die Gerade  $a$  schneidet die atropische Linie  $a_1$  in einem Punkte  $S$ . Der Strahlenbüschel, dessen Mittelpunkt  $S$  ist, liegt perspectivisch zu den sämtlichen Strahlenbüscheln, in die er übergeht, und zwar sind sie sämtlich perspectivisch zu einer Punktreihe  $g$ , die durch den Schnittpunkt von  $a$  mit den entsprechenden Geraden  $a_1, a_2, a_3$  etc. parallel zur anderen atropischen Linie gelegt wird. Sämtliche Strahlen des Büschels  $S$  haben infolge dessen dieselbe Eigenschaft wie  $a$ , jeder schneidet sich mit allen Geraden, in die er über-

geht, in einem Punkte von  $g$ . Alle Strahlen eines Büschels  $S_1$ , dessen Mittelpunkt der Schnittpunkt einer der Strahlen des Büschels  $S$  mit der zweiten atropischen Linie  $a_2$  ist, haben dieselbe Eigenschaft wie  $a$ . Ein jeder dieser Büschel enthält nämlich eine Gerade  $SS_1$ , welche die Eigenschaft hat, und daraus ergibt sich, wie wir eben für  $S$  gesehen haben, dass alle Strahlen des Büschels  $S_1$  die Eigenschaft haben. Damit ist der Satz bewiesen:

20. Geht eine Gerade  $a$  in mehreren Phasen der Ausdehnung, bei denen die atropischen Linien dieselben sind, durch einen Punkt  $P$  des Raumes, so geht auch jede andere Gerade  $b$  des Systems bei diesen Phasen durch denselben Punkt  $Q$ .

Für den Fall, dass die Bedingungen des vorigen Satzes bei einer Aufeinanderfolge von stetigen Aenderungen des Systems erfüllt sein sollen, ist noch der Weg zu untersuchen, den ein Punkt des Krystalles beschreibt. Der Strahlenbüschel, dessen Mittelpunkt ein beliebiger Punkt  $P$  der Ebene ist, geht in einen projectivischen Büschel über. Bei der ersten Ausdehnung mag der Büschel, dessen Mittelpunkt  $P$  ist, in einen Büschel  $P_1$  übergehen. Entsprechende Strahlen von  $P$  und  $P_1$  schneiden sich, wenn die atropischen Linien reell sind, auf Punkten einer Hyperbel  $H$ , die durch den Schnittpunkt der atropischen Linien geht, und deren Asymptoten den letzteren parallel laufen. Bei der folgenden Ausdehnung gehe  $P_1$  in einen Büschel  $P_2$  über. Aus unseren Bedingungen folgt, dass jeder Strahl von  $P_2$  durch den Punkt der Hyperbel  $H$  geht, in dem sich die entsprechenden Strahlen von  $P$  und  $P_1$  schneiden. Dies ist, da  $P_2$  zur Hyperbel projectivisch ist, nur möglich, wenn  $P_2$  selbst auf der Hyperbel liegt.<sup>1)</sup> Es folgt also:

21. Bleiben bei stetigen Ausdehnungen des Systems die (reellen) atropischen Linien dieselben, und ist die Bedingung erfüllt, dass eine und folglich jede Gerade des Krystalles in allen Phasen der Ausdehnung durch denselben Punkt geht, so

1) Reye, Geometrie der Lage. 1. p. 108. 1882.

bewegt sich im allgemeinen ein jeder Punkt des Systems auf einer Hyperbel.

Die Sätze 16, 18 und 19 sind nur Specialfälle einiger von Seydewitz<sup>1)</sup> für die Situationslinien und Situationspunkte ausgesprochener Sätze.

Da eine Punktreihe  $a$  bei einer Ausdehnung in eine zu  $a$  projectivische Punktreihe  $a_1$  verwandelt wird, so bilden die Verbindungslinien entsprechender Punkte einen Strahlenbüschel zweiter Ordnung, und da  $a$  und  $a_1$  ähnlich sind, so umhüllt dieser Strahlenbüschel zweiter Ordnung eine Parabel. Also:

22. Bei einer unendlich kleinen Ausdehnung umhüllen die Bewegungsrichtungen aller Punkte einer Geraden eine Parabel. Bei einer endlichen Aenderung des Systems umhüllen die Verbindungen aller Punkte, die vor der Ausdehnung auf einer Geraden liegen, mit den entsprechenden Punkten nach der Ausdehnung eine Parabel.

Ausnahmefälle, wo die einander entsprechenden Punktreihen perspectivisch liegen, wo also die Bewegungsrichtungen der Punkte einer Geraden alle durch einen Punkt gehen, haben wir schon früher (vgl. Satz 16) kennen gelernt.

Nun mag noch hier der Satz Burmester's<sup>2)</sup> seinen Platz finden:

23. Der geometrische Ort der Systempunkte einer Phase eines affin veränderlichen ebenen Systems, welche gleiche Geschwindigkeiten besitzen, ist eine Ellipse, deren Mittelpunkt der Geschwindigkeitspol ist.

„Geschwindigkeitspol“ nennt Hr. Burmester den sich selbst entsprechenden Punkt der beiden Systeme. Da bei der Ausdehnung der Krystalle die Zeit keine Rolle spielt, so habe ich den Ausdruck Geschwindigkeitspol sonst nicht gebraucht. An die Stelle von „Geschwindigkeiten“ kann man in dem obigen Satz „Verschiebungen“ setzen.

1) Seydewitz, Grunert's Arch. 8. p. 25. 1840.

2) Burmester, Zeitschr. f. Math. u. Phys. 23. p. 123. 1878.



Hiermit ist die Reihe leicht abzuleitender Sätze für die Ausdehnung in der Ebene nicht abgeschlossen. Wir verlassen aber jetzt diese einfachere Theorie und wenden uns zu der Lehre von der Ausdehnung der Krystalle als affinveränderliche räumliche Systeme.

## II. Die Ausdehnung im Raume.

Für die asymmetrischen Krystalle ist die thermische Ausdehnung im Raume von hoher Bedeutung. Die Anwendung der Geometrie der Lage auf diesen allgemeinen Fall zeigt sich noch nützlicher, als ihre Anwendungen auf die thermischen Veränderungen in der Ebene. Hier, wo die rechnenden Methoden sehr hohe Anforderungen an das Anschauungsvermögen stellen, lässt sich am ehesten der Vorthail der geometrischen Methode würdigen.

Wir haben es jetzt also mit affinen räumlichen Systemen zu thun. Es lässt sich fast alles, wie bei den ebenen Systemen wiederholen. Ausser der unendlich fernen Situationsebene besitzen zwei affine Systeme im allgemeinen einen Situationspunkt im Endlichen. Durch diesen gehen dann noch höchstens drei Situationsebenen und drei Situationsstrahlen, wenn wir nicht den besonderen Fall der perspectivischen Lage haben.

Zu den Situationsebenen gehören die atropischen Ebenen Fletcher's, und zwar sind dies diejenigen Situationsebenen, die wir erhalten, wenn die gegenseitige Lage der beiden Systeme der thermischen Ausdehnung ohne Einwirkung äusserer Kräfte entspricht. Wie schon für die Ausdehnung in der Ebene bemerkt wurde, haben wir im allgemeinen noch keine Beobachtungen über die Lage der atropischen Ebenen. In besonderen Fällen allerdings, nämlich für die regulären und optisch einaxigen, sowie für die rhombischen Krystalle lassen sich die Verhältnisse schon ohne weiteres übersehen. Für das reguläre Krystallsystem müssen alle Ebenen atropisch sein, für die einaxigen Krystalle alle durch die Hauptaxe gelegten Ebenen und die zu ihr senkrechte Symmetrieebene, und für die rhombischen Krystalle die drei Symmetrieebenen. In letzterem Falle sind die thermischen

Axen zugleich atropische Linien. Bei den Krystallen des monosymmetrischen Systems lässt sich noch eine atropische Linie und eine atropische Ebene angeben; nämlich die Symmetrieaxe und die Symmetrieebene. Ueber die atropischen Ebenen im asymmetrischen System lässt sich nichts sagen, weil keine experimentellen Angaben vorliegen; für die beiden atropischen Ebenen, die im monosymmetrischen Systeme noch unbekannt sind, lässt sich nur behaupten, dass sie senkrecht auf der Ebene der Symmetrie stehen müssen.

24. Von einem Büschel paralleler Ebenen im ersten System und dem ihm entsprechenden Büschel im anderen System schneiden sich je zwei homologe Ebenen auf einer durch den Situationspunkt gehenden Ebene.

Die beiden Büschel sind nämlich projectivisch und haben ihre unendlich ferne Ebene entsprechend gemein, liegen also perspectivisch. In dem Situationspunkt aber schneiden sich zwei homologe Ebenen der Büschel.

25. Hiernach ergibt sich die Construction des Situationspunktes, wenn vier Paar homologe Punkte oder Ebenen der affinen Systeme gegeben sind. Dieselben bilden zwei einander entsprechende Tetraëder. Ist  $s$  die Schnittlinie von zwei einander entsprechenden Tetraëderflächen und  $s_1$  diejenige der zu ihnen beziehungsweise parallelen Ebenen, welche durch die gegenüberliegenden Tetraëderecken gehen, so liegen  $s$  und  $s_1$  mit dem gesuchten Situationspunkte in einer Ebene  $\epsilon$ . Man erhält auf diese Weise vier Ebenen  $\epsilon$ , welche sich in dem Situationspunkte schneiden.

26. Einer Kugel im einen affinen System entspricht ein Ellipsoid im anderen. Den drei Hauptaxen des Ellipsoides entsprechen als conjugirte Durchmesser drei aufeinander senkrecht stehende Durchmesser der Kugel. Dies sind die Linien der grössten, kleinsten und mittleren Ausdehnung oder die thermischen Axen.

Jeder Strahlenbündel des einen Systems geht in einen collinearen Strahlenbündel des anderen Systems über, und es gilt der Satz:

In zwei collinearen Strahlenbündeln gibt es allemal ein

paar homologe rechtwinklige Dreikante, d. h. es gibt drei zu einander rechtwinklige Strahlen des einen, welchen drei ebensolche Strahlen des anderen entsprechen.<sup>1)</sup> Diese Tripel von rechtwinkligen Strahlen sind die thermischen Axen.

Zwei collineare räumliche Systeme erzeugen im allgemeinen einen Strahlencomplex zweiten Grades. Zwei einander entsprechende Ebenen der collinearen Systeme schneiden sich in einem Strahl desselben, und zwei einander entsprechende Punkte werden durch einen seiner Strahle verbunden. Die entsprechend gemeinen Punkte und Ebenen der beiden collinearen Räume nennt man Hauptpunkte und Hauptebenen des Complexes. Sind diese alle reell, so gibt es im allgemeinen höchstens vier Hauptpunkte und vier Hauptebenen. Diese sind die Ecken und Flächen des sogenannten Haupttetraëders. Zwei affine Räume erzeugen einen Strahlencomplex, dessen eine Hauptebene die unendlich ferne Ebene ist. Wir nennen mit Hrn. Burmester diesen tetraëdralen Strahlencomplex, dessen eine Hauptebene im Unendlichen liegt, einen triëdralen Strahlencomplex. Den im Endlichen liegenden, sich selbst entsprechenden Punkt oder Situationspunkt der beiden affinen Systeme nennt Burmester den Geschwindigkeitspol. Wir wollen ihn im Folgenden den „Verschiebungspol“ nennen. Bei einer thermischen Aenderung des Krystalles von einer Temperatur zu einer um eine endliche Differenz davon verschiedenen Temperatur wird jeder Punkt des Krystalles eine Curve beschreiben. In den folgenden Sätzen nennen wir die Strecke, die die Anfangslage eines Punktes mit seiner Endlage verbindet, die Verschiebung des Punktes. Für eine verschwindend kleine Temperaturdifferenz ist diese Verschiebung der wirkliche Weg des Punktes. In denjenigen der folgenden Sätze, die von Burmester entlehnt sind, ersetzen wir die „Geschwindigkeiten“, welche Burmester braucht, durch „Verschiebungen.“ Die Beweise der nächsten Sätze ergeben sich ohne weiteres.

27. Die Gesammtheit aller Geraden in einer Phase eines affin veränderlichen Systems, deren

1) Vgl. Seydewitz, Grunert's Arch. 9. p. 170. 1847.

Punkte in einer Ebene liegende Verschiebungsrichtungen besitzen, bilden einen triëdralen Strahlencomplex; und die in einer Ebene liegenden Verschiebungsrichtungen umhüllen eine Parabel.<sup>1)</sup>

28. Die Verschiebungsrichtungen der Punkte einer Geraden des affin veränderlichen Systems erfüllen ein hyperbolisches Paraboloid.<sup>2)</sup>

29. Die Verschiebungsrichtungen der Punkte jeder durch den Verschiebungspol gehenden Geraden sind parallel.<sup>3)</sup>

30. Der geometrische Ort der Systempunkte eines affin veränderlichen Systems, deren Verschiebungsrichtungen durch einen Punkt gehen, ist eine Raumcurve dritter Ordnung, welche diesen Punkt und den Verschiebungspol enthält, und diese Richtungen erfüllen eine Kegelfläche zweiter Ordnung.<sup>4)</sup>

„Zwei entsprechende Ebenenbüschel in zwei affinen Systemen erzeugen ein durch die selbstentsprechenden Punkte gehendes Hyperboloid“, daraus folgt:

31. Bei einer verschwindend kleinen Aenderung des Krystalles durch die Wärme drehen sich alle, durch eine Gerade desselben gehenden Ebenen um Gerade eines Hyperboloids. Ferner:

32. Der geometrische Ort der Punkte eines affin veränderlichen Systems, deren Verschiebungsrichtungen eine Gerade schneiden, ist ein durch diese Gerade und den Verschiebungspol gehendes Hyperboloid, und die Gesamtheit dieser Richtungen umhüllt eine Complexfläche.<sup>5)</sup>

Ein Parallelebenenbüschel  $u$  verwandelt sich in einen Parallelebenenbüschel  $u_1$ . Die entsprechenden Ebenen der beiden Büschel schneiden sich auf einer durch den Verschie-

1) Burmester, l. c. Satz 30.

2) Burmester, l. c. Satz 31.

3) Burmester, l. c. Satz 32.

4) Burmester, l. c. Satz 33.

5) Burmester, l. c. Satz 34.

gebungspol gehenden Ebene  $s$ . Alle Punkte, deren Verschiebungen in den Ebenen des Büschels  $u_1$  stattfinden, müssen auf der Ebene  $s$  liegen. Diese Verschiebungen sind alle senkrecht zu der Normalen auf dem Büschel  $u_1$ ; daraus folgt:

33. Alle Punkte in einer Phase eines affin veränderlichen Systems, deren Verschiebungsrichtungen senkrecht zu einer Geraden sind, liegen in einer durch den Verschiebungspol gehenden Ebene.

Dieser Satz ist von Hrn. Durrande<sup>1)</sup> analytisch abgeleitet worden. Der synthetische Beweis rührt von Hrn. Burmester<sup>2)</sup> her.

Eine Ebene  $E_1$  im affinen System  $S_1$  gehe bei einer gewissen Aenderung der Temperatur in die Ebene  $E_2$  im System  $S_2$  über. Der Schnittgeraden von  $E_1$  und  $E_2$  im System  $S_2$  entspricht eine auf  $E_1$  liegende Gerade im System  $S_1$ . Projiciren wir die Punkte der Ebene  $E_2$  senkrecht auf die erste Ebene  $E_1$ , so sind das ursprüngliche ebene System  $E_1$  und die auf  $E_1$  liegende Projection von  $E_2$  zu einander affin und haben einen im Endlichen liegenden Punkt und zwei durch diesen gehende Gerade, die nicht reell zu sein brauchen, entsprechend gemein; hieraus folgt:

34. In jeder Ebene  $E_1$  einer Phase eines affin veränderlichen Systems gibt es einen Punkt, dessen Verschiebungsrichtung senkrecht zu dieser Ebene  $E_1$  ist, und zwei durch diesen Punkt gehende reelle oder imaginäre Gerade, die solche Punkte tragen, deren Verschiebungsrichtungen in senkrecht auf  $E_1$  stehenden Ebenen liegen, und ferner eine Gerade, für deren Punkte die Verschiebungsrichtungen in der Ebene  $E_1$  selbst liegen.

Ausgeschlossen sind bei diesem Satz die sich selbst entsprechenden (atropischen) Ebenen von  $S_1$  und  $S_2$ . Satz und Beweis sind von Hrn. Burmester.<sup>3)</sup>

Ohne den Beweis führen wir hier den zu 23. analogen Satz an:

1) Durrande, Compt. rend. 74. p. 1243. 1872.

2) Burmester, l. c. Satz 35.

3) Burmester, l. c. Satz 36.

35. Der geometrische Ort der Systempunkte einer Phase eines affin veränderlichen Systems, welche gleiche Verschiebungen erleiden, ist ein Ellipsoid, dessen Mittelpunkt der Verschiebungspol ist.<sup>1)</sup>

Ein tetraëdraler Strahlencomplex ist bestimmt, wenn das Haupttetraëder gegeben ist und ausserdem ein Strahl des Complexes. Ein triëdraler Strahlencomplex ist daher bestimmt, wenn die drei im Endlichen liegenden Hauptebenen und ein Strahl gegeben sind. Für unseren Fall heisst das: Der Complex von Verschiebungsrichtungen aller Punkte ist gegeben durch die atropischen Ebenen und die Verschiebungsrichtung eines Punktes. Wenn wir annehmen, dass bei stetigen Aenderungen des Systems zwischen verschiedenen Temperaturen die atropischen Ebenen dieselben bleiben sollen, und entweder:

1. ein Punkt sich immer auf einer Geraden des Raumes bewegen soll, oder:

2. eine Ebene immer durch eine Gerade des Raumes gehen soll,

so muss bei einer Ausdehnung aus irgend einer der betrachteten Phasen in irgend eine andere immer derselbe triëdrale Strahlencomplex entstehen, und es ergibt sich<sup>2)</sup>:

36. Bleiben die atropischen Ebenen für eine Reihe von stetigen Aenderungen eines Krystalles dieselben, und bewegt sich ein Punkt dabei immer auf einer Geraden, so bewegt sich jeder andere Punkt ebenfalls auf einer Geraden, und jede Ebene beschreibt einen Ebenenbüschel dritter Ordnung.

37. Bleiben die atropischen Ebenen für eine Reihe von stetigen Aenderungen eines Krystalles dieselben, und schneidet sich eine Ebene  $E$  mit allen ihr entsprechenden in einer Geraden  $g$  des Raumes, so schneidet sich auch jede andere Ebene  $E_1$  des Krystalles mit ihren entsprechenden in einer Geraden  $g_1$ , und jeder Punkt beschreibt eine Raumcurve dritter Ordnung.

1) Burmester, l. c. Satz 38. p. 127.

2) Reye, Geometrie der Lage. 2. p. 144. 1882.



Betrachten wir drei Phasen  $S_1$ ,  $S_2$  und  $S_3$  eines Strahlenbündels  $S$ . Dieselben sind collinear, von ihren homologen Ebenen schneiden sich je drei in einem Punkte, und der Ort dieser Punkte ist eine Fläche dritter Ordnung. Es gibt<sup>1)</sup> im allgemeinen höchstens sechs Gerade, in denen je drei homologe Ebenen der Bündel sich schneiden.

38. Von allen Ebenen, die durch einen Punkt eines Krystalles gehen, drehen sich im allgemeinen höchstens sechs bei zwei aufeinanderfolgenden verschwindend kleinen Ausdehnungen je um dieselbe Gerade des Raumes.

Man bezeichnet in der Krystallographie als zu einer „Zone“ gehörig, solche ebene Flächen, die derselben Geraden parallel laufen. Es ist von besonderem Interesse, zu erfahren, wie die gegenseitige Neigung solcher in einer Zone liegenden oder tautozonalen Flächen sich mit der Temperatur ändert. Bei unseren Betrachtungen repräsentirt der Ebenenbüschel I. Ordnung, der aus allen durch eine Gerade gehenden Ebenen besteht, soweit Neigungen zwischen den verschiedenen Ebenen in Betracht kommen, die Zone im krystallographischen Sinne.

Jeder Ebenenbüschel I. Ordnung verwandelt sich bei der Ausdehnung in einen zu ihm projectivischen Ebenenbüschel. Schneiden wir beide Ebenenbüschel durch Ebenen senkrecht zu den Axen, so erhalten wir zwei Strahlenbüschel, die ebenfalls zu einander projectivisch sind. Zwei Strahlen eines dieser Strahlenbüschel schliessen den Neigungswinkel der entsprechenden Ebenen ein. Indem wir die beiden Strahlenbüschel in perspectivische Lage bringen, lassen sich leicht die folgenden Sätze beweisen, für die wir auch nur auf die Sätze 6, 7, 8, 9 und 10 des ersten Theiles hinzuweisen brauchen.

39. Zu jeder Ebene einer Zone lässt sich eine andere Ebene finden, die vor und nach der Ausdehnung mit jener denselben Winkel einschliesst.

40. Es lassen sich immer zwei Ebenen finden,

1) Reye, Geometrie der Lage. 2. p. 216. 1882.

die vor und nach der Ausdehnung einen gegebenen Winkel einschliessen.

41. Es gibt in einer Zone zwei Ebenen, die vor und nach der Ausdehnung aufeinander senkrecht stehen.

42. In einer Zone gibt es nur zwei Ebenen, die in drei Phasen des Systems denselben Winkel einschliessen.

43. In einer Zone gibt es im allgemeinen gar keine Ebenen, die in vier oder mehr Phasen des Systems denselben Winkel einschliessen.

Es kann unter besonderen Umständen aber eintreten, dass alle Ebenen einer Zone ihre gegenseitige Neigung bei der Ausdehnung beibehalten. Für das reguläre Krystallsystem haben alle Zonen diese Eigenschaft, bei den optisch-einaxigen nur die Zone, deren Axe Hauptaxe ist. Nach einem Satze, der wohl unter den neuen, durch Anwendung der synthetischen Methode gefundenen Sätzen der wichtigste ist, müssen auch bei der Ausdehnung von Krystallen, die den anderen Systemen angehören, solche Zonen vorhanden sein. Wenn die Winkel zwischen allen Ebenen einer Zone in zwei Phasen der Ausdehnung die gleichen sein sollen, so müssen zwei homologe projectivisch gleiche Ebenenbüschel vorhanden sein. In zwei collinearen Strahlenbündeln  $S$  und  $S_1$  sind aber in der That zwei Paar homologe projectivisch gleiche Ebenenbüschel vorhanden. Dieselben lassen sich nach Reye<sup>1)</sup> finden. Wir können sie die „isogonalen“ Zonen nennen.

44. Es gibt für je zwei Phasen der Ausdehnung zwei „isogonale“ Zonen, d. h. zwei Zonen, in welchen alle Ebenen nach der Ausdehnung dieselben Winkel einschliessen, wie vorher.

Aus der Construction der Axen dieser Zonen ergibt sich, dass dieselben in einer der Symmetrieebenen desjenigen Ellipsoides der zweiten Phase liegen, in welches eine Kugel der ersten Phase übergeht, und dass sie zu den beiden

1) Reye, Geometrie der Lage. 2. p. 267. 1882.

anderen Symmetrieebenen desselben Ellipsoides symmetrisch liegen. Also:

45. Die Axen der isogonalen Zonen liegen in der Ebene zweier thermischen Axen und symmetrisch zu denselben.

Im rhombischen Systeme liegen also die beiden Axen der isogonalen Zonen ähnlich wie die optischen Axen, d. h. in einer Symmetrieebene und symmetrisch zu den beiden anderen. Ebenso wie die thermischen Axen und atropischen Linien für verschiedene Temperaturintervalle nicht dieselben zu sein brauchen, ist es auch nicht nöthig, dass bei verschiedenen Ausdehnungen eines Krystalles die isogonalen Zonen dieselben seien.

#### Schluss.

Manche der oben aufgeführten neuen Sätze können nicht den Anspruch machen, für die Krystallographie von Wichtigkeit zu sein. Aber auch sie dürften beweisen, wie werthvoll die Beachtung der Beziehung der Affinität für eine klare Einsicht in die verwickelten Verhältnisse bei der Ausdehnung der Krystalle ist. Denselben Zweck erfüllen auch die einfachen Herleitungen schon bekannter Sätze durch unsere Methode. Am besten hat sich aber die Methode bewährt bei der Ableitung einiger neuer Sätze, die auch krystallographisches Interesse besitzen, so des Satzes von den „isogonalen“ Zonen. Endlich ist zu bemerken, dass von der Fülle leicht abzuleitender Sätze nur einige hier ihre Aufnahme gefunden haben. Es ist selbst nicht unwahrscheinlich, dass von den übrigen Sätzen, die sich auf diese Weise ableiten lassen, manche die hier gegebenen an Wichtigkeit übertreffen. Der Zweck dieser Arbeit ist ja nur, darauf hinzuweisen, wie sich die ganze Lehre von der Ausdehnung der Krystalle mit der bekannten Lehre von den affinen Systemen deckt.

Physik. Inst. d. Univ. Strassburg, Juni 1884.

VII. *Ueber das Eindringen der Electricität in Gase;*  
*von F. Narr in München.*

§ 1. Fassen wir die Gase als Dielectrica auf, so haben wir nach der allgemeinen Annahme<sup>1)</sup> in dem Vorgange, den die Einführung eines electrischen Körpers in einem Gasraume hervorruft, zwei Processe voneinander zu unterscheiden, nämlich die in sehr kurzer Zeit erfolgende und mit der Entladung des eingeführten Körpers wieder schnell verschwindende Polarisation der Gastheilchen und den Uebergang, das Eindringen der Electricität in die Gasmasse. Die folgende Mittheilung bezieht sich auf den letztgenannten Process.

Ich habe schon bei einer früheren Gelegenheit<sup>2)</sup> betont, dass die electrischen Vorgänge in den Gasen durch besondere sättigende Ladungen eigenthümliche Abänderungen erleiden, die ich als sehr wichtig für die Deutung jener Vorgänge selbst anzunehmen geneigt war. Ich habe nun in den beiden verflossenen Wintern diese Versuche wieder aufgenommen, nachdem sich einige Verbesserungen, die ich an meiner Versuchsanordnung anbrachte, bewährt hatten.

Ein Sinuselectrometer, das trotz mancher Mängel bei richtiger Behandlung doch ein recht passendes Messinstrument bei derartigen Versuchen bildet, wurde durch einen über einen Meter langen, feinen Platindraht mit einem Quecksilbernäpfchen aus Schellack verbunden; aus einem zweiten solchen Näpfchen, das mit dem ersten durch einen kleinen Metallbügel jederzeit sicher in leitende Verbindung gesetzt werden konnte, führte ein zweiter, ungefähr gleich langer Platindraht wohl isolirt durch einen grossen, mit der Erde verbundenen Metallcylinder, einen electrischen Schirm, dessen Raum vollständig abgeschlossen und durch Chlorcalcium vollkommen trocken erhalten war. Innerhalb dieses Schirmes war endlich auf einem ausgezeichnet isolirenden Glase eine hohle Metallkugel von 16 cm Durchmesser, die Metallhülle, aufgestellt, in die der letzterwähnte Draht in der früher an der

1) G. Wiedemann, Die Lehre von der Electricität. 2. p. 8.

2) Narr, Wied. Ann. 16. p. 560. 1882.

oben angegebenen Stelle beschriebenen Weise luftdicht und wohl isolirt hineinging; derselbe trug an seinem Ende, in der Mitte der Metallhülle, eine kleine Messingkugel von  $2\frac{1}{2}$  cm Durchmesser, die Versuchskugel.

Durch diese Anordnung war ich zunächst in den Stand gesetzt, immer eine bestimmte Electricitätsmenge vom Electrometer auf das übrige, durch den Bügel damit in Verbindung zu setzende System, insbesondere auf die Versuchskugel zu übertragen und die Abänderung der damit eintretenden Ladung des Systemes in verschiedenen dichten und verschiedenartigen Gasen, mit denen der Raum der isolirten oder auch mit der Erde verbindbaren Metallhülle gefüllt wurde, zu verfolgen. Der Schirm gestattete, nicht blos den Raum, in dem die Metallhülle sich befand, vollkommen trocken und damit diese letztere gleichmässig isolirt zu erhalten, sondern vor allem auch die Metallhülle und ihren Inhalt vor äusseren Einflüssen zu sichern. Vermittelst besonderer Quecksilberschlüsse konnte ich die Metallhülle mit der Erde und mit der Luftpumpe in Verbindung setzen, ohne die Trockenheit der Luft im Schirme zu gefährden und zugleich die vollständige Isolirung der Metallhülle bei den übrigen Versuchen in Frage zu stellen. Seit dieser Isolirung und Beschirmung der Metallhülle habe ich niemals wieder die früher<sup>1)</sup> berührte plötzliche Entladung der Versuchskugel in sehr dünnen Gasen (bei isolirter Metallhülle) beobachtet, die ich daher äusseren Einflüssen zuschreiben muss.

§ 2. Zunächst theile ich neun Versuchsreihen mit, bei denen ich insofern eine Sättigung eintreten liess, als die Metallhülle während einer jeden einzelnen Reihe stets isolirt blieb. Die Zahlen in den einzelnen Horizontalreihen bedeuten die Ladungen, die infolge einer stets gleich grossen Ladung des Electrometers auf dem damit verbundenen Systeme in fünf aufeinander folgenden Versuchen beobachtet wurde, wobei das System immer dazwischen kurz, aber vollständig entladen und vier Minuten pausirt wurde. Zwischen

1) Narr, Wied. Ann. 11. p. 155. 1880.

den einzelnen Reihen verfloßen anderer Versuche und der Neufüllung wegen acht bis zehn Tage.

Gas	I	II	III	IV	V
200 mm Luft	577	594	596	595	598
200 mm H	567	586	591	593	596
30 mm H	492	582	591	594	595
20 mm H	471	572	580	584	585
10 mm H	414	533	532	554	564
10 mm Luft	495	528	579	589	589
10 mm CO <sub>2</sub>	499	585	589	593	592
5 mm Luft	415	522	539	529	563
H Vacuum	382	440	436	440	435

Diese Tabelle lässt erkennen, dass der Einfluss der in dieser Weise durchgeführten Sättigung von der Natur und Dichte des Gasmediums abhängig ist; eine allgemeine Erklärung desselben durch eine Sättigung der isolirenden Stützen ist daher vollkommen unzulässig.

Die Anfangsladungen nehmen mit abnehmendem Drucke ab, die folgenden Ladungen steigen aber nach besonderen, durch die Natur und Dichte des Gases bedingten Gesetzen. Während bei höherem Drucke durch die Sättigung schliesslich ungefähr dieselbe Ladung wieder herbeigeführt wird, ist dies bei geringem Drucke nicht mehr der Fall; in einem Luftvacuum habe ich z. B. die Anfangsladung 377 durch acht folgende Versuche nur auf 475 steigern können. Daraus folgt aber, dass die grosse Verschiedenheit der Anfangsladungen in verschiedenartigen und verschieden dichten Gasen nicht ihre Erklärung in einer Verschiedenheit in der Capacität der kleinen Versuchskugel finden könne; wir werden sie daher nothwendigerweise zu suchen haben in einem verschieden grossen Uebergang von Electricität in die Gesamtgasmasse, der eine Sättigung derselben und damit eine Steigerung der folgenden Ladungen herbeiführt. Die Gesamtgasmasse besteht aber aus dem Gase selbst, aus Quecksilberdampf und endlich aus Staub.

Ich habe schon in meinen früheren Abhandlungen dargestellt, dass der in der Metallhülle enthaltene Staub solche regelmässige Electricitätsverluste nicht herbeiführen könne.



Die gewöhnliche Anschauung über die mögliche Rolle des Staubes bei diesen Vorgängen führt eben zu Schlüssen, die meinen Versuchsergebnissen direct widersprechen. Legt man aber das Hauptgewicht nicht auf die Quantität des im Gase suspendirten Staubes, sondern auf die mit abnehmendem Drucke wachsende Beweglichkeit desselben, so ist die Möglichkeit, obige Resultate dadurch zu erklären, wenigstens nicht so ohne weiteres zu leugnen; aber die Regelmässigkeit der Zahlen, die ich mit der Metallhülle in ihrem jetzigen Zustande bei einem bunten Wechsel von Art und Dichte der Gasfüllung erhielt, würde zu einer aus der kinetischen Gastheorie herausconstruirten kinetischen Staubtheorie führen müssen, wobei man aber doch schliesslich nicht begreifen würde, warum gerade den Staubtheilchen, nicht aber den Gastheilchen die massgebende Rolle zufallen solle. Dass gegen diesen Schluss nicht etwa Versuche sprechen können, bei denen der Staub künstlich vermehrt und in heftige Bewegung versetzt wird, scheint mir keines besonderen Nachweises zu bedürfen; die heterogene Masse, die wir Staub nennen, kann selbstverständlich einem geladenen Leiter, mit dem sie in Berührung kommt, Electricität entziehen und wird, da sie nie ganz auszuschliessen ist, der Gewinnung theoretisch verwerthbarer Zahlen immer grosse Hindernisse in den Weg legen.

Gegen die Annahme, dass der Quecksilberdampf die beobachteten Erscheinungen bewirkt habe, sprechen, abgesehen von den früher<sup>1)</sup> schon erhobenen Einwänden, die bei 10 mm Druck und nahezu gleicher Temperatur in den drei verschiedenen Gasen angestellten Versuche, die durch die Tabelle von Versuchsergebnissen, die ich am Schlusse dieser Mittheilung geben werde, für die verschiedensten Druckgrössen ihre Bestätigung finden.

Hiernach bleibt uns aber nur noch die Annahme übrig, dass wir es hier mit einem Uebergange der Electricität in das Gas selbst zu thun haben, der mit der Verdünnung wächst und in H grösser ist, als in Luft und  $\text{CO}_2$ ; aus demselben entspringt eine Sättigung des Gases mit Electricität.

1) Narr, Wied. Ann. 8. p. 266. 1879.

§ 3. Um diesen Schluss mit weiteren Bestätigungen zu versehen und gleichzeitig das Eindringen der Electricität näher zu verfolgen, habe ich die oben angeführten Versuche nur mit der Modification wiederholt, dass ich am Schlusse eines jeden einzelnen Versuches einer Reihe die Metallhülle mit der Erde in leitende Verbindung brachte, die ich, nachdem das System entladen war, nach dem ersten Versuche 15 m, nach dem zweiten Versuche 45 m und nach dem dritten Versuche 90 m bestehen liess. Hierdurch erhielt ich folgende Resultate.

Gas	I	II	III	IV
200 mm H	558	591	598	608
30 mm H	518	519	523	547
20 mm H	474	499	518	492
10 mm H	409	417	483	480
10 mm Luft	501	512	512	487
10 mm CO <sub>2</sub>	498	522	512	521
H Vacuum	374	396	398	395

Aus dieser Tabelle folgen zunächst wieder im allgemeinen die früheren Schlüsse. Zugleich ersieht man hieraus aber auch, dass nur bei 200 mm Druck wieder die gleiche Sättigung eintritt; schon bei 30 mm ist dieselbe nicht mehr erreicht, und in noch höherem Grade ist dies bei grösserer Verdünnung der Fall. Die zwischen den Versuchen eingeschaltete Erdverbindung der Metallhülle bewirkt also, insbesondere bei geringer Dichte des Gases, ein Schwinden der Sättigung, wie es von dem von mir vertretenen Standpunkte aus nothwendig genannt werden muss. Der Einfluss der Dauer der Erdverbindung weist zwar auch eine unverkennbare charakteristische Abhängigkeit von der Natur und Dichte des Gases auf; erschwert wird aber immerhin der Einblick in denselben durch den Umstand, dass das Eindringen der Electricität in das Gas im allgemeinen physikalische, vielleicht auch chemische Aenderungen herbeiführt, welche ebenfalls von der Zeit abhängig sind.

Dieses Resultat habe ich noch durch weitere Versuchsreihen zu controliren gesucht, indem ich die erst angeführ-

ten nur mit der Abänderung wiederholte, dass ich die Metallhülle, die bei jenen stets isolirt geblieben war, nun immer mit der Erde in leitender Verbindung hielt. Die folgende Tabelle enthält die unter diesen Umständen beobachteten Ladungen, welche den eben gezogenen Schluss vollkommen bestätigen.

Gas	I	II	III	IV	V
200 mm H	556	585	592	592	595
30 mm H	372	410	409	408	402
20 mm H	331	336	334	332	332
10 mm H	211	213	212	212	211
H Vacuum	0	0	0	0	0

§ 4. Mit den vorstehenden Versuchen sind wir nun zu einer neuen, für den betrachteten Process wichtigen Frage gekommen, woher nämlich die Unterschiede in den Ladungen kommen, die das System unter sonst gleichen Verhältnissen durch eine und dieselbe Electrometerladung erhält, wenn wir das eine mal die Metallhülle isoliren, das andere mal aber mit der Erde verbinden.

Wenn wir zunächst von einem Uebertritte der Electricität in den Gasraum absehen, so könnte die Ursache dieses Unterschiedes nur in einer entsprechenden Aenderung der Capacität der kleinen Versuchskugel gesucht werden; geben wir aber ersteren zu, so kann nicht geleugnet werden, dass die Erdverbindung der Metallhülle den Uebertritt und das Weiterführen der Electricität durch den Gasraum begünstigt (ich bediene mich mit Absicht dieses allgemeinen Ausdrucks) und mithin jenen Unterschied wenigstens jedenfalls theilweise erklärlich macht. Gegen die Annahme, dass der erstgenannte Umstand, der auch für den Uebertritt der Electricität in den Gasraum von Belang wäre, eine ausreichende Erklärung darbiete, spricht nun aber eine Reihe von Wahrnehmungen in einer so nachdrücklichen Weise, dass wir sie ausschliessen müssen.

Zunächst sind die Sättigungen, die auch bei der beständigen Verbindung der Metallhülle mit der Erde in ganz ähnlicher Weise, wie bei der intermediären eintreten, nur

durch einen Uebertritt der Electricität in den Gasraum, nämlich durch ein Eindringen derselben in das Gas erklärlich.

Vergleichen wir sodann die Ladungen

Gas	bei isolirter Hülle und Maximal- sättigung	bei Zwischenverbindung der Hülle mit der Erde von			bei Ladung in Erdver- bindung der Hülle
		5 m	15 m	1 Tag	
200 mm H	596	592	591	567	556
30 mm H	595	546	519	492	372
20 mm H	585	505	498	471	331
10 mm H	564	420	417	414	211
H Vacuum	435	403	396	352	0

miteinander, so sehen wir, dass die Zwischenerdverbindung der Metallhülle, die auf die Capacität der Versuchskugel keinen Einfluss ausüben konnte, doch den gleichen, wenn auch quantitativ geringeren Einfluss auf die Ladung ausübt, wie die bei der Ertheilung der Ladung vorhandene Erdverbindung.

Ferner haben meine älteren und neueren Versuche ergeben, dass der „Verlust“, den die Ladung des Systemes bei Erdverbindung der Hülle gegenüber der Ladung desselben bei isolirter Hülle aufweist, auch in letzterem Falle in ungefähr gleichem Betrage nicht bloß durch eine nachfolgende längere Erdverbindung überhaupt, sondern auch allmählich durch successive kurze Erdverbindungen herbeizuführen ist.

Endlich haben ebensolche Versuche gezeigt, dass, wenn wir überhaupt einmal die Verbindung der Metallhülle mit der Erde genügend lange Zeit haben eintreten lassen, im allgemeinen eine Auflösung derselben ein leichtes Sinken des Potentials, eine Wiederherstellung derselben ein leichtes Steigen des Potentials auf dem Systeme bewirkt, das ungefähr von dem Range der Zerstreuung ist.

Aus allen diesen Thatsachen werden wir aber schliessen müssen, dass die grossen Differenzen zwischen den Ladungen bei isolirter und mit der Erde verbundener Metallhülle nicht sowohl durch entsprechende Differenzen in der Capacität der Versuchskugel, als vielmehr durch einen von der Natur und

Dichte des Gases abhängigen Uebertritt der Electricität in den Gasraum bedingt sind.

§ 5. Meine Versuche mit isolirter Metallhülle, wie ich sie in den § 2 und 3 dargelegt habe, lassen wohl nur die Deutung zu, dass der bei ihnen constatirte Uebergang der Electricität in das Gas durch die Bewegungen der geladenen Gastheiligen vermittelt wird. Dieser Schluss erhält eine besondere Stütze durch die nachstehende Tabelle von Versuchsergebnissen, die ich mit einer etwas kleineren Electrometerladung schon vor einem Jahre bei isolirter Metallhülle erhalten habe.

Druck	Ladung des Systemes in			Druck	Ladung des Systemes in		
	CO <sub>2</sub>	Luft	H		CO <sub>2</sub>	Luft	H
200 mm	541	545	539	20 mm	540	509	487
50 mm	541	543	539	15 mm	535	497	468
40 mm	541	542	524	10 mm	497	484	422
30 mm	541	542	500	5 mm	440	426	405

Die durch das verschieden starke Eindringen der Electricität differentiirten Ladungen in den drei verschiedenen Gasen ordnen sich genau so an, wie es einer convectiven Entladung gemäss der kinetischen Gastheorie entspricht.

Bei den Versuchen, in denen die Metallhülle mit der Erde verbunden war, habe ich zunächst, um die unmittelbaren Folgerungen aus meinem Erfahrungsmaterial von Hypothesen möglichst frei zu halten, nur von einem Uebertritte der Electricität in den Gasraum gesprochen. Indess wird man, wenn man den eben gezogenen Schluss annimmt, auf Grund meiner Gesamtergebnisse nicht zu leugnen vermögen, dass auch hier die Annahme einer convectiven Entladung sehr viel Wahrscheinlichkeit für sich hat; eine wesentliche Bestärkung aus dem gleichen Grunde erfährt dieselbe aber auch hier durch die nachfolgende Tabelle von Versuchsergebnissen, die ich ebenfalls vor einem Jahre mit der gleichen Electrometerladung wie oben bei Erdverbindung der Hülle erhalten habe.

Druck	Ladung des Systemes in			Druck	Ladung des Systemes in		
	CO <sub>2</sub>	Luft	H		CO <sub>2</sub>	Luft	H
200 mm	509	516	507	20 mm	496	400	314
50 mm	511	515	478	15 mm	423	363	275
40 mm	514	483	414	10 mm	371	349	224
30 mm	513	423	378	5 mm	296	170	0

Nehmen wir aber diese Anschauung an, die meines Wissens hier zum ersten mal durch die Beziehung auf die kinetische Gastheorie einen höheren Grad von Wahrscheinlichkeit gewinnt, so ist das, was wir Zerstreuung der Electricität nennen, eine aus Ableitung der Stützen und convectiver Entladung sich zusammensetzende Erscheinung, die freilich aus mancherlei Gründen, vor allem infolge der unvermeidlichen Sättigung des Gases gerade nach der uns interessirenden Seite hin nicht mit Schärfe zu verfolgen ist. Solange die Hülle isolirt ist, erweist sich infolge dessen der Zerstreuungscoefficient, wie nicht anders zu erwarten ist, als von der Natur und Dichte des Gases ziemlich unabhängig; bringen wir aber die Metallhülle mit der Erde in leitende Verbindung, so lässt sich ein Wachsen der Zerstreuung mit abnehmendem Drucke, insbesondere in H und Luft, nicht verkennen.

Zum Schlusse will ich noch hervorheben, dass ich die Frage, ob die Capacität der kleinen Versuchskugel mit der Natur und Dichte des umgebenden Gasmediums sich überhaupt nicht ändert, als durch die vorstehende Mittheilung in keiner Weise präjudicirt erachten muss; ihre experimentelle Lösung ist mit ganz erheblichen Schwierigkeiten verknüpft.

#### VIII. *Bemerkung über die Stöpselrheostaten von Siemens und Halske; von E. Dorn.*

(Hierzu Taf. VII Fig. 9–12.)

Der hauptsächliche Zweck dieser Zeilen ist, auf eine Eigenthümlichkeit der weitverbreiteten Siemens'schen Stöpselrheostaten aufmerksam zu machen, welche vielfach übersehen



zu sein scheint, obwohl sie für die Berechnung genauerer Beobachtungen nicht unwichtig ist.

Die Einrichtung der erwähnten Apparate ist folgende (siehe Fig. 9). An den auf einer starken Ebonitplatte sitzenden Messingklötzen  $M_1, M_2, M_3 \dots$  sind mit Hülfe starker Schrauben die Kupferdrähte  $K_1, K_2, K_3 \dots$  angebracht, welche unten ein Querstück zum Einklemmen der Enden der Neusilberdrahtrollen  $N, N' \dots$  tragen, und zwar ist die Schaltung derart, dass an je einem Kupferdraht die Enden zweier aufeinanderfolgender Widerstände befestigt sind — natürlich abgesehen von dem ersten und letzten Kupferdraht einer Reihe.

Wird nun der Stöpsel  $S'$  allein gezogen, so durchläuft der Strom den Weg  $M_1 K_1 N K_2 M_2 \dots$ , ebenso nach Ziehen von  $S'$  allein  $M_2 K_2 N' K_3 M_3 \dots$ , hingegen nach Herausnehmen der beiden aneinandergrenzenden Stöpsel  $S'$  und  $S''$  den Weg  $M_1 K_1 N' N'' K_3 M_3 \dots$ , d. h. es ist jetzt der hinzugefügte Widerstand nicht gleich der Summe der Widerstände, welche durch Ziehen der beiden einzelnen Stöpsel eingeschaltet werden, vielmehr um den doppelten Betrag von  $K_2$  kleiner.

In mehreren von mir untersuchten Widerstandssätzen verschiedenen Datums der Anfertigung fand ich den Widerstand eines Kupferdrahtes etwa  $= 0,0004$  S.-E., sodass neben den kleineren der Widerstände, besonders den Bruchtheilen der Einheit, die Kupferdrähte nicht mehr zu vernachlässigen sind. Uebrigens waren in einigen der von mir geöffneten Kästen sämtliche Kupferdrähte von merklich gleicher Länge, in anderen nicht.

Vor der Verwendung für feinere Messungen muss der Widerstandssatz calibriert und — wenn man sich nicht mit den relativen Werthen der Widerstände begnügen will — wenigstens ein Stück auf einen Normalwiderstand bezogen werden.

Wie ich an einem speciellen Beispiel zeigen werde, vielfältigen sich bei der Berechnung der Calibrirung die von den Kupferdrähten herrührenden Terme derart, dass sie bei den grösseren Widerständen

nahe denselben Bruchtheil des Ganzen ausmachen, wie bei den kleineren.

Der zu untersuchende Kasten enthalte die Widerstände 0,1 ... 100 S.-E. in der Fig. 10 dargestellten Anordnung. Wie Fig. 11 angedeutet, werde zur Calibrirung das Schema der Wheatstone'schen Brücke benutzt;  $W_1$  ist der oben genannte Widerstandssatz,  $W_2, W_3, W_4$  drei andere ähnlicher Einrichtung,  $D$  eine Doseneinheit, welche nach Belieben ausgeschaltet werden kann,  $B$  eine „Brückenwalze“, d. h. ein um seine Axe drehbarer Cylinder mit aufgewundenem Draht, gegen welchen ein Contactröllchen drückt.<sup>1)</sup>

Die Vergleichung der einzelnen Widerstände des Zweiges 1 erfolgt durch Substitution. Es sei nun  $k$  der Widerstand eines einzelnen der (untereinander gleich vorausgesetzten) Kupferdrähte,  $\sigma$  der Widerstand eines Stöpsels,  $W_{0,1}, W_{0,2} \dots$  die Widerstände der Neusilberdrahtrollen, welche mit 0,1, 0,2 ... bezeichnet sind,  $S$  der Widerstand der (als richtig angenommenen) Doseneinheit,  $U$  der eines Umganges der Brückenwalze. Es werde zunächst 0,1 gezogen und die Brückenwalze eingestellt, dann 0,1 gestöpselt und weiter gedreht, bis wieder kein Strom durch die Brücke geht.

Dies gibt eine Gleichung von der Form:

$$W_{0,1} + 2k - \sigma = xU,$$

oder wenn ich noch:

$$(1) \quad W_r - \sigma = w_r,$$

setze:

$$(2) \quad w_{0,1} + 2k = xU,$$

und ähnlich mit Rücksicht darauf, dass für jede zusammenhängende Gruppe nur zwei Kupferdrähte in Ansatz zu bringen sind:

$$(3) \quad w_{0,2} + 2k = w_{0,1} + 2k + yU,$$

$$(4) \quad w_{0,3} + 2k = w_{0,2} + 2k + z_{0,2}U,$$

$$(5) \quad w_{0,5} + 2k = w_{0,1} + w_{0,2} + w_{0,3} + 2k + z_{0,5}U,$$

$$(6) \quad w_1 + 2k = w_{0,1} + w_{0,2} + w_{0,3} + w_{0,5} + 2k + z_1U.$$

1) Diese Anordnung ist von Hrn. H. Wild gewählt. Siehe Bestimmung des Werthes der Siemens'schen Widerstandseinheit in absolutem, electromagnetischem Maasse, St. Petersburg 1884.

Die 1 ist mit der Doseneinheit verglichen, also:

$$(7) \quad w_1 + 2k = S + \tilde{\omega} U.$$

Aus vorstehenden Gleichungen folgt nun zunächst:

$$(8) \quad w_{0,1} = x U - 2k,$$

$$(9) \quad w_{0,2} = (x + y) U - 2k,$$

$$(10) \quad w_{0,2'} = (x + y + z_{0,2'}) U - 2k,$$

$$(11) \quad w_{0,5} = (3x + 2y + z_{0,2'} + z_{0,5}) U - 6k,$$

$$(12) \quad w_1 = (6x + 4y + 2z_{0,2'} + z_{0,5} + z_1) U - 12k,$$

$$(13) \quad w_1 = S - 2k + \tilde{\omega} U.$$

Die Gleichungen (12) und (13) erlauben  $U$  durch  $S$  auszudrücken:

$$(14) \quad U = \frac{1}{6x + 4y + \zeta} [S + 10k],$$

wo der Kürze wegen:

$$2z_{0,2'} + z_{0,5} + z_1 - \tilde{\omega} = \zeta$$

geschrieben ist.

Wird hiermit in (2) ... (5) hineingegangen, so folgt:

$$(15) \quad w_{0,1} = \frac{x}{6x + 4y + \zeta} [S + 10k] - 2k,$$

$$(16) \quad w_{0,2} = \frac{x + y}{6x + 4y + \zeta} [S + 10k] - 2k,$$

$$(17) \quad w_{0,2'} = \frac{(x + y + z_{0,2'})}{6x + 4y + \zeta} [S + 10k] - 2k,$$

$$(18) \quad w_{0,5} = \frac{(3x + 2y + z_{0,2'} + z_{0,5})}{6x + 4y + \zeta} [S + 10k] - 6k.$$

Da nahezu  $x = y$  ist, und ferner  $z_{0,2'}$ ,  $z_{0,5}$ ,  $z_1$ ,  $\tilde{\omega}$ ,  $\zeta$  kleine Grössen sind, so wird der in (15) vorkommende Factor  $x/(6x + 4y + \zeta)$  nahe = 0,1, und ich kann daher schreiben:

$$w_{0,1} = \frac{x}{6x + 4y + \zeta} S + k - 2k,$$

oder:

$$(19) \quad w_{0,1} = 0,1 S + \epsilon_{0,1} - k, \text{ und analog:}$$

$$(20) \quad w_{0,2} = 0,2 S + \epsilon_{0,2},$$

$$(21) \quad w_{0,2'} = 0,2 S + \epsilon_{0,2'},$$

$$(22) \quad w_{0,5} = 0,5 S + \epsilon_{0,5} - k,$$

$$(23) \quad w_1 = 1 S + \epsilon_1 - 2k,$$

wo  $\epsilon_{0,1}$  etc. die von  $k$  unabhängigen Theile der Correctionsgrössen in Siemens'schen Einheiten ausgedrückt bedeuten.

Die noch übrigen Messungen führen auf Gleichungen von der Form:

$$(24) \quad w_1' + 2k = w_1 + 2k + \eta_1',$$

$$(25) \quad w_2 + 2k = w_1 + w_1' + 2k + \eta_2,$$

$$(26) \quad w_3 + 2k = w_{0,1} + w_{0,2} + \dots w_2 + 2k + \eta_3,$$

$$(27) \quad w_{10} + 2k = w_{0,1} + w_{0,2} + \dots w_3 + 4k + \eta_{10}^{1)},$$

$$(28) \quad w_{10}' + 2k = w_{10} + 2k + \eta_{10}',$$

$$(29) \quad w_{20} + 2k = w_{10} + w_{10}' + 2k + \eta_{20},$$

$$(30) \quad w_{50} + 2k = w_{0,1} + w_{0,2} + \dots w_{20} + 4k + \eta_{50},$$

$$(31) \quad w_{100} + 2k = w_{0,1} + w_{0,2} + \dots w_{50} + 4k + \eta_{100},$$

woraus dann weiter:

$$(32) \quad w_1' = 1S + \varepsilon_1' - 2k, \quad (36) \quad w_{10}' = 10S + \varepsilon_{10}' - 18k,$$

$$(33) \quad w_2 = 2S + \varepsilon_2 - 4k, \quad (37) \quad w_{20} = 20S + \varepsilon_{20} - 36k,$$

$$(34) \quad w_3 = 5S + \varepsilon_3 - 10k, \quad (38) \quad w_{50} = 50S + \varepsilon_{50} - 90k,$$

$$(35) \quad w_{10} = 10S + \varepsilon_{10} - 18k, \quad (39) \quad w_{100} = 100S + \varepsilon_{100} - 180k.$$

In den weitaus häufigsten Fällen wird gebraucht der Werth des durch Ziehen gewisser Stöpsel hinzugefügten Widerstandes. Dieser ist gleich dem Widerstand der vom Strom durchlaufenen Neusilberrollen und Kupferdrähte, vermindert um den Widerstand der gezogenen Stöpsel.

Mit Rücksicht auf die Gleichung (1) erhellt nun leicht, dass dann der Widerstand der Stöpsel selbst gar nicht bekannt zu sein braucht, denn die Gleichungen (19)...(23) und (32)...(39) geben die Correctionen, welche an den Differenzen  $w_r = W_r - \sigma$  zwischen jeder Neusilberdrahtrolle und dem zugehörigen Stöpsel anzubringen sind. Vorausgesetzt ist hierbei freilich, dass man den Widerstand der Stöpsel zu verschiedenen Zeiten constant setzen kann, eine Frage, auf welche ich noch zurückkomme.

Unter anderen Umständen, z. B. wenn man den Widerstandskasten als Vergleichswiderstand bei der Methode von Hrn. F. Kohlrausch<sup>2)</sup> benutzt, wird die Kenntniss des zwischen zwei Punkten thatsächlich vorhandenen Widerstandes verlangt, und dieser lässt sich aus den obigen Gleichungen nur bei Kenntniss der Stöpselwiderstände ableiten.

Um zu zeigen, dass durch Vernachlässigung der Kupferdrähte in der That erhebliche Fehler entstehen können, ent-

1) Hier sind nämlich zwei Stöpselgruppen vorhanden: 0,1... 2 und 5.

2) F. Kohlrausch, Sitzungsber. d. Berl. Acad. 1863. p. 465.

nehme ich ein Beispiel der schon citirten Abhandlung des Hrn. Wild. In die Endformel für den Werth der Siemens'schen Einheit in absolutem Maasse tritt der Factor ein:

$$(40) \quad \left( \frac{w_m + w_s}{w_s} \right)^2 \frac{1}{W},$$

wo  $W$  den Widerstand des Multiplicators bei den Dämpfungsbeobachtungen bedeutet,  $w_m$  und  $w_s$  den Widerstand von Multiplicator- und Nebenschlusszweig bei der Bestimmung der Galvanometerconstante.

$W$ ,  $w_m$ ,  $w_s$  wurden mittelst der Wheatstone'schen Brücke<sup>1)</sup> erhalten durch Vergleichung mit Stücken des Widerstandskastens Nr. 2805, der die in Fig. 10 angedeutete Einrichtung hatte und dem obigen Beispiel entsprechend calibriert war.

Hr. Wild hat den Einfluss der Kupferdrähte nicht in Rechnung gezogen; unter der Voraussetzung dass der Kasten wie Fig. 9 construirt war, soll der Einfluss dieser Vernachlässigung bestimmt werden.

Es ist bei Hrn. Wild nahezu:

$$(41) \quad w_s = 1,24570^2), \quad w_m = 115,747^3), \quad W = 2,9482^4),$$

und es sind die Vergleichswiderstände<sup>5)</sup>:

$$1 + 0,2, \quad 100 + 10 + 5 + 1, \quad 1 + 2.$$

Weiter<sup>6)</sup> gibt Hr. Wild an:

$$0,2 = 0,19965 \text{ S.-E.} \quad | \quad 2 = 1,99601 \text{ S.-E.} \quad | \quad 10 = 9,9815 \text{ S.-E.}$$

$$1 = 0,99766 \quad „ \quad | \quad 5 = 4,9884 \quad „ \quad | \quad 100 = 99,763 \quad „$$

somit waren von den Widerständen (41) die Beträge:

$$(42) \quad 1,19731, \quad 115,731, \quad 2,9937,$$

durch Stücke von Nr. 2805 dargestellt, während:

$$(43) \quad +0,04839, \quad +0,016, \quad -0,0455$$

vom Brückendraht herrührten.

Die Calibergleichungen von Hrn. Wild folgen aus den meinigen, wenn in letzteren  $k = 0$  gesetzt wird.

1) Die Anordnung war analog wie in Fig. 11.

2) l. c. p. 98.

3) l. c. p. 99.

4) l. c. p. 118.

5) l. c. p. 96.

6) l. c. p. 95.

Daher sind zunächst (vgl. (14)) die Theile (43) im Verhältniss  $S : S + 10k$  oder, wenn auch  $k$  in S.-E. ausgedrückt wird,  $1 : 1 + 10k$  zu vergrössern.

Ferner waren in den drei Fällen die durch Ziehen der betreffenden Stöpsel hinzugefügten Widerstände<sup>1)</sup>:

$$1 + 0,2 = w_1 + 2k + w_{0,2} + 2k, \\ 100 + 10 + 5 + 1 = w_{100} + 2k + w_{10} + w_5 + 2k + w_1 + 2k^2,$$

$$1 + 2 = w_1 + 2k + w_2 + 2k, \\ \text{woraus nach (19)...(23) und (32)...(39):}$$

$$(44) \begin{cases} 1 + 0,2 = 1,2 S + \varepsilon_1 + \varepsilon_{0,2} + 2k, \\ 100 + 10 + 5 + 1 = 116 S + \varepsilon_{100} + \varepsilon_{10} + \varepsilon_5 + \varepsilon_1 - 204k, \\ 1 + 2 = 3 S + \varepsilon_1 + \varepsilon_2 - 2k. \end{cases}$$

Nach der schon gemachten Bemerkung sind die rechten Seiten von (44) ohne die Terme in  $k$  mit den Grössen (42) identisch.

Fasse ich alles zusammen, so ist der wahre Werth der einzelnen Widerstände:

$$w_1 = 1,24570 + 2k + 0,04839 \cdot 10k = 1,24570 + 2,484k, \\ w_{10} = 115,747 - 204k + 0,016 \cdot 10k = 115,747 - 203,84k, \\ W = 2,9482 - 2k - 0,0455 \cdot 10k = 2,9482 - 2,455k, \\ \text{und der Factor (40) wird:}$$

$$(45) \quad \left( \frac{116,993 - 201,36k}{1,2457 + 2,484k} \right)^2 \frac{1}{2,9482 - 2,455k},$$

oder mit Fortlassung der höheren Potenzen von  $k$ :

$$(46) \quad \left( \frac{116,993}{1,2457} \right)^2 \frac{1}{2,9482} [1 - k \cdot 6,60].$$

Das Endresultat von Hrn. Wild:

$$1 \text{ S.-E.} = 0,94597 \text{ Ohm,}$$

wäre also mit  $1 - k \cdot 6,60$  zu multipliciren oder um

$$\delta = k \cdot 6,60 \cdot 0,94597$$

zu vermindern. Setze ich, den von mir untersuchten Kasten entsprechend,  $k = 0,0004$  S.-E., so wird  $\delta = 0,00250$ , und das Endresultat geht über in:

$$1 \text{ S.-E.} = 0,94347 \text{ Ohm}$$

1) Nach der Versuchsanordnung von Hrn. Wild sind diese in Rechnung zu ziehen.

2) 10 und 55 bilden eine Gruppe.



In Beziehung auf den Widerstand der Stöpsel theilte mir Hr. Dr. O. Frölich gelegentlich mit, dass, auch bei sorgfältigster Behandlung, durch denselben „Fehler von einigen Zehntausendtheilen einer S.-E.“ entstehen könnten. Hierdurch veranlasst, habe ich mehrfach bei verschiedenen Stöpselrheostaten den Widerstand aller Stöpsel zusammen, bei einem (einem Universalwiderstand) auch den Widerstand einzelner Stöpsel<sup>1)</sup> bestimmt. Die Stöpsel wurden mit feinem Smirgel oder Wiener Kalk geputzt und mit einem Leder abgerieben, die Löcher durch Auswischen mit einem feinen Leder sauber gehalten. Bei einem Rheostaten erhielt ich 20 Stöpsel = 0,0018 S.-E., bei einem anderen 19 Stöpsel = 0,0017 S.-E., also übereinstimmend ein Stöpsel im Mittel 0,00009 S.-E. Alle 25 Stöpsel des Universalwiderstandes wurden gefunden 0,0098, 0,0042, 0,0024 woraus ein Stöpsel im Mittel 0,00015, 0,00017, 0,00010. Die zahlreichen Messungen einzelner Stöpsel lieferten im Durchschnitt 0,0015, die Extreme waren 0,0006 und 0,0018. Die Temperatur betrug bei den bisher erwähnten Messungen 10–12° C. Nachdem die sämtlichen Stöpsel mit Bimsstein sorgfältig neu eingeschliffen waren, ergaben sich bei 12° C. Werthe zwischen 0,00005 und 0,00010, aber 14 Tage später bei derselben Temperatur 0,00011 bis 0,00016, nach vier Wochen bei 17° 0,00007 bis 0,00016. Der grösste Widerstand, den überhaupt ein sauberer Stöpsel zeigte, war 0,00027; es ist dies zugleich der einzige über 0,00020, den ich beobachtet habe.

Hieraus scheint mir hervorzugehen, dass von etwa 10 S.-E. an Stöpselcontacte auch für feinere Messungen sicher genug sind, dass man sie für kleinere Widerstände aber besser vermeiden wird.

Obwohl ich sehr wohl weiss, dass die Siemens'schen Rheostaten nicht für Physiker allein, sondern auch für Techniker bestimmt sind, und ich die Schwierigkeit einer

1) Es wurde durch den ganz gestöpselten Rheostaten ein Strom von etwa 0,5 Ampère gesendet. Die Messingklötze hatten Bohrungen in der Mitte; hier liessen sich Stöpsel mit oben angebrachten Klemmschrauben eindrücken, in welche die Drähte eines graduirten empfindlichen Galvanometers eingeklemmt wurden.

Constructionsänderung bei fabrikmässiger Herstellung nicht verkenne, möchte ich mir doch in dieser Hinsicht einige Vorschläge erlauben.

1) Statt der Reihenfolge der Widerstände 0,1, 0,2, 0,2', 0,5 . . . wäre die den besseren Gewichtssätzen entsprechende 0,1, 0,1', 0,1'', 0,2, 0,5 . . . vorzuziehen, indem dadurch die Möglichkeit der Calibrirung eines jeden Kastens in sich gegeben wäre, die gegenwärtig ausgeschlossen ist.

2) In der Mitte eines jeden Messingklotzes ist ein Loch zu bohren. Diese Einrichtung bestand bis vor kurzem bei den Universalwiderständen, scheint aber seitdem wieder aufgegeben zu sein. Die Verwendbarkeit der Apparate würde dadurch eine weit vielseitigere werden: man könnte jeden Widerstand für sich benutzen, Zweigströme ableiten u. s. w.

3) Von jedem Messingklotz sind zwei Kupferdrähte herunterzuführen und an jedem Kupferdraht nur ein Ende einer Neusilberdrahtrolle zu befestigen.<sup>1)</sup> Dann würde stets beim Ziehen mehrerer Stöpsel die Summe derjenigen Widerstände eingeschaltet werden, welche durch Herausnehmen der einzelnen Stöpsel hinzugefügt wird, und complicirte Rechnungen, wie die oben ausgeführte, wären überflüssig.

4) Zur Einführung eines Thermometers ist eine Oeffnung anzubringen, die für gewöhnlich verschlossen wird.

In neuerer Zeit werden von der Firma Siemens und Halske auch sogenannte Dekadenwiderstände ausgegeben. Dieselben enthalten zehn gleiche Rollen, und durch Versetzen eines einzigen Stöpsels kann eine derselben, oder 2...10 eingeschaltet werden.

Die Anordnung ist schematisch in Fig. 12 darstellt, es geht daraus unmittelbar hervor, dass immer ausser den Neusilberdrahtrollen zwei Kupferdrähte durchlaufen werden. Die Unsicherheit infolge der Stöpselcontacte wird hier erheblich herabgesetzt, da immer nur einer vorhanden ist.

Für den Physiker haben diese Apparate den Uebelstand, dass sie in der vorliegenden Form nicht calibrirbar sind. Die

1) Hr. Mechaniker Waibler (am phys. Inst. der technischen Hochschule in Darmstadt) hat nach meinen Angaben einen Widerstandssatz in dieser Art mit Quecksilbercontacten hergestellt.

Anbringung einer Bohrung in jedem der Messingklötze und Beigabe zweier passender Stöpsel mit Klemmschrauben würde dem abhelfen.

Auch eine Abänderung dem obigen Vorschlage (3) gemäss wäre wenigstens für kleinere Widerstände von Vortheil.  
Darmstadt, im Mai 1884.

### IX. Zur Kenntniss dichromatischer Farbensysteme; von Arthur König.

(Hieraa Taf. VIII Fig. 1.)

#### § 1. Einleitung.

Nach der Young-Helmholtz'schen Farbentheorie entsteht in Augen mit normaler Farbenempfindung die Empfindung „Weiss“, d. h. diejenige Empfindung, welche das Sonnenlicht nach dem Durchgang durch die Atmosphäre hervorruft, dadurch, dass jede der drei Grundempfindungen (Roth, Grün und Violett, resp. Blau) in nahezu gleicher Stärke erregt wird. Die Annahme einer immer völlig gleichen Erregung der drei Grundempfindungen ist unmöglich in Rücksicht auf die bekannte und von den Malern zur Erzielung gewisser Effecte oftmals verwerthete Thatsache, dass das grelle Sonnenlicht einen gelblichen, dass durch dicke Wolkenschichten gedämpfte Sonnenlicht aber einen bläulichen Farbenton besitzt. Letzteres ist sogar der Fall bei dem in seiner objectiven Zusammensetzung noch etwas mehr rothe Strahlen als das Sonnenlicht enthaltenden Mondlicht.<sup>1)</sup> Diese Abweichungen von völlig neutralem, d. h. solchem Weiss, in dem keine der Grundempfindungen vorherrscht, sind aber nur unbedeutend, und die Vertheilung der Stärke der Grundempfindungen über

1) Mit dem Helmholtz'schen Leukoskope habe ich seit meiner letzten Publication über Photometrie (Wied. Ann. 17. p. 990. 1883.) auch das Mondlicht untersucht und bin zu dem obigen Resultate gelangt. Nach der in jener Abhandlung benutzten Bezeichnung ist:

für Petroleumlicht . . . . . $\beta = 71,1^\circ$	für Magnesiumlicht . . . . . $\beta = 86,3^\circ$
„ Gaslicht . . . . . 71,2	„ Mondlicht . . . . . 87,1
„ Kalklicht . . . . . 76,7	„ Sonnenlicht . . . . . 90,5.
„ electr. Kohlenbogenlicht 79,0	

das Spectrum ist eine derartige, dass keinerlei homogenes Licht auch nur annähernd (abgesehen von ganz hohen Intensitäten) die Empfindung Weiss erzeugt. Es würde dieses an derjenigen Stelle im Spectrum der Fall sein, wo bei einer graphischen Darstellung der Stärke der Grundempfindungen die Ordinaten der drei Curven gleiche oder nahezu gleiche Höhe hätten.

Anders liegen die Verhältnisse aber in Farbensystemen mit nur zwei Grundempfindungen, auf welche sich meine nachfolgenden Untersuchungen beziehen, und welche ich im Unterschiede von den normalen, trichromatischen Farbensystemen als dichromatische bezeichnen will.

Sehen wir ab von der sehr selten vorkommenden sogenannten „Violettblindheit“ (nach v. Helmholtz) oder „Blaugelbblindheit“ (nach Hering<sup>1)</sup>), so können wir als charakteristische Eigenthümlichkeit der Besitzer dichromatischer Farbensysteme die mangelnde Fähigkeit Roth von Grün zu unterscheiden ansehen. Um frei von jeder theoretischen Voraussetzung zu bleiben und den Boden der reinen Empirie nicht zu verlassen, werde ich im Folgenden für „Rothblinde“ und „Grünblinde“ (nach v. Helmholtz) oder „Rothgrünblinde“ (nach Hering) mich der Bezeichnung „Rothgrünverwechsler“ bedienen und möchte dieselbe auch zur allgemeinen Benutzung empfehlen, solange nicht Thatsachen für die Richtigkeit der einen oder der anderen Theorie entschieden haben.

Die Beobachtungen der Herren A. v. Hippel<sup>2)</sup> und F. Holmgren<sup>3)</sup> an einem einseitigen Rothgrünverwechsler haben den Nachweis gebracht, dass das betreffende dichromatische Farbensystem sich nicht in der Weise zusammensetzt, dass eine der drei Grundempfindungen des normalen, trichromatischen Systems fortgefallen war, sondern es war vielmehr an Stelle von Roth und Grün die Grundempfindung Gelb getreten. Dadurch

1) Hr. Joy Jeffries in Boston hat unter 802 von ihm untersuchten „Farbenblinden“ nur drei „Violettblinde“ gefunden. Vgl. J. Jeffries, Colorblindness, its dangers and its detection. Boston 1883.

2) A. v. Hippel, Graefe's Archiv 26. (2) p. 176. 1880 und 27. (3) p. 47. 1881.

3) F. Holmgren, Centralblatt für die medicin. Wissensch. 1880. Nr. 49 u. 50.

erklärt es sich, dass bei jenem Farbenverwechsler die Empfindung Weiss dieselbe war wie bei Personen mit trichromatischem Farbensystem.

Wenn wir nun demnach auch nicht mehr berechtigt sind, mit den Bezeichnungen „rothblind“ und „grünblind“ die Anschauung zu verbinden, welche bei der Einführung dieser Namen zu Grunde lag<sup>1)</sup>, so haben doch andererseits alle Untersuchungen an Rothgrünverwechslern eine Trennung derselben in zwei Classen unvermeidlich gemacht. Die einen, die sogenannten „Rothblinden“, verwechseln ein helles Roth mit einem dunklen Grün, und die anderen, die sogenannten „Grünblinden“, ein dunkles Roth mit einem hellen Grün.<sup>2)</sup>

Da bei einem dichromatischen Farbensystem in dem einen Theile des Spectrums die Grundempfindung Gelb und in dem anderen Blau vorherrscht, so muss zwischen diesen beiden Theilen eine Stelle vorhanden sein, wo beide sich zu der Empfindung „Weiss“ zusammensetzen, d. h. wo die oben erwähnten Curven für die Grundempfindungen sich schneiden. Diesen Punkt nennt man den „neutralen Punkt“ im Spectrum der Rothgrünverwechsler, und man hat mehrfach die Wellenlänge desselben zu bestimmen gesucht. Nachdem nun aber Hr. W. Preyer<sup>3)</sup> experimentell nachgewiesen, dass die Lage desselben von der Intensität des Spectrums abhängig sei, liessen sich nur solche Bestimmungen miteinander vergleichen, welche unter genau denselben Umständen ausgeführt worden waren.

Ich unternahm es daher, die Wellenlänge des neutralen Punktes einer sorgfältigen Messung an einer Anzahl von Rothgrünverwechslern zu unterziehen und dabei besonders zu beachten:

1. wie gross bei mehrmaliger Ausführung derselben Messung die Genauigkeit der Bestimmung war;

1) H. v. Helmholtz, Verhandl. d. naturhist.-med. Vereins zu Heidelb. 2. p. 1. 1859, oder Wissenschaftl. Abhandl. 2. p. 346. Leipz. 1868.

2) Beobachtungen mit dem bereits oben erwähnten Leukoskope haben diese Trennung ebenfalls als eine scharfe ergeben. Die Einzelheiten dieser Untersuchung werde ich baldigst publiciren.

3) W. Preyer, Pflüger's Arch. 25. p. 31. 1881. Auch separat erschienen unter dem Titel: Ueber den Farben- und Temperatursinn mit besonderer Rücksicht auf Farbenblindheit. Bonn 1881.

2. ob bei gleicher Intensität die Trennung der Rothgrünverwechsler in zwei scharf gesonderte Classen auch in der Wellenlänge des neutralen Punktes hervortrat;

3. in welcher Weise die letztere bei demselben Individuum von der Intensität des Spectrums abhängig war.

## § 2. Die Bestimmung der Wellenlänge des neutralen Punktes bei gleicher Intensität.

Die Bestimmung der Wellenlänge des neutralen Punktes wurde, soweit ich die darauf bezügliche Literatur bisher kennen gelernt habe, in der Weise ausgeführt, dass in der Brennebene des Oculars eines Spectralapparates sich ein Diaphragma mit einem schmalen Spalte befand, und nun der untersuchte „Farbenblinde“ angewiesen wurde, durch das Ocular zu blicken und den Ocular- oder den Collimatorspalt so lange zu verschieben, bis der im Ocularspalte sichtbare Theil des Spectrums den Eindruck von Weiss, resp. Graumachte. Es wurde dann aus der Lage des Ocular- oder Collimatorspaltes die mittlere Wellenlänge jenes Spectrumstreifens bestimmt. Diese Methode besitzt, abgesehen von der oftmals vorhandenen Ungenauigkeit in der Bestimmung der Wellenlänge<sup>1)</sup> zwei Fehlerquellen. Erstlich hat der Farbenverwechsler nicht zu gleicher Zeit weisses Licht vor Augen, um es mit dem neutralen Streifen vergleichen zu können, sondern er muss sich die Empfindung „Weiss“ aus der Erinnerung vergegenwärtigen, und zweitens hat der aus dem Spectrum herausgeschnittene Theil in seiner ganzen Breite nicht dieselbe Farbe. Letzterem Mangel kann zwar dadurch einigermassen abgeholfen werden, dass man den Streifen sehr schmal macht, aber damit wird auch die genaue Beurtheilung seiner Farbe schwieriger, sodass dem Vorgehen in dieser Richtung bald eine Grenze gesetzt ist.

Die Umgehung aller dieser Fehlerquellen geschah, indem ich ein von Maxwell zuerst ausgeführtes und von Hrn. v. Helmholtz bei der Construction seines Apparates zur sub-

1) Die auf solche Weise in dem Laboratorium des Hrn. Donders ausgeführten Messungen sind zwar von der genannten Ungenauigkeit frei, leiden aber auch an den beiden anderen nachstehend gerügten Uebelständen.



jectiven Mischung zweier Spectralfarben<sup>1)</sup> befolgtes Princip meiner Untersuchungsmethode zu Grunde legte.

Ein gleichseitiges Prisma war so auf dem Tische eines Spectralapparates fest aufgestellt, dass eine der Kanten gerade in der Mitte von dem Objectiv des Fernrohres stand. Das Ocular dieses Fernrohres war entfernt und an seiner Stelle ein Spalt angebracht, der genau parallel dem des Collimators gerichtet war. Bei geeigneter Einstellung wurde ein Spectrum in der Ebene des Ocularspaltes entworfen und aus ihm durch den letzteren ein kleiner Streifen herausgeschnitten. Ein unmittelbar vor dem Ocularspalt befindliches und durch ihn schauendes Auge erblickte dann diejenige Fläche des Prismas, aus der die Strahlen heraustraten, in gleichmässiger Färbung, und bei der geringen Breite des Spaltes, welche etwa  $\frac{1}{40}$  der gesammten Länge des sichtbaren Spectrums betrug, ist der in das Auge gelangende Theil des Spectrums ein so geringer, dass wir nach einem bekannten Gesetze der Farbmischung seinen subjectiven Gesamteindruck gleich demjenigen seiner mittleren Wellenlänge setzen dürfen. Die theoretische Erklärung für dieses Gesetz ist darin zu suchen, dass wir auf einem so kleinen Abschnitte des Spectrums den Verlauf der Curven für die Stärke der drei Grundempfindungen als gradlinig annehmen können.

Das Collimatorrohr war durch eine Mikrometerschraube verschiebbar, und seine Stellung konnte immer durch einen an ihm angebrachten kleinen Spiegel mittelst Scala und Fernrohr genau bestimmt werden.

Wenn man den Collimatorspalt mit Sonnenlicht beleuchtete und mit einer starken Lupe den Ocularspalt betrachtete, so sah man in ihm bei Drehung jener Mikrometerschraube die hervorragenderen Fraunhofer'schen Linien vorbeipassiren, und indem man die Scalentheile ablas, bei welchen sie mit den Rändern des Ocularspaltes zusammenfielen, liess sich genau die Stellung bestimmen, wo sie in der Mitte des Spaltes sich befanden, wo also dem unmittel-

1) Siehe den Bericht über die wissenschaftlichen Instrumente auf der Berliner Gewerbeausstellung im Jahre 1879. Berlin 1880. p. 520.

bar durch den Spalt blickenden Auge die eine Prismenfläche in der dieser Linie entsprechenden Farbe erschien.

Nachdem ich die den Fraunhofer'schen Linien  $b_1$  und  $F$  zugehörigen Scalentheile aufgesucht hatte, war ich im Stande, mit Hülfe der beiden ersten Glieder der Cauchy'schen Formel:

$$n = a + \frac{\beta}{\lambda^2} + \frac{\gamma}{\lambda^4} + \dots,$$

wo  $n$  den Brechungscoefficienten,  $\lambda$  die zugehörige Wellenlänge und  $\alpha$ ,  $\beta$ ,  $\gamma$  u. s. w. dem brechenden Medium eigenthümliche Constanten bezeichnen, die mittlere Wellenlänge des durch den Ocularspalt gehenden Lichtes für jede zwischen den Linien  $b_1$  und  $F$  gelegene Stellung des Collimatorrohres durch Interpolation zu berechnen.

Wegen der Kleinheit dieses Intervalles war es nicht nöthig, mehr als zwei Glieder der Formel in Rechnung zu ziehen. Ihre Berücksichtigung wäre erst erforderlich gewesen bei einer zwei- bis dreifach genaueren Bestimmung der Wellenlänge, als ich sie ausgeführt habe, und wegen der immerhin mit einiger, wenn auch sehr geringen Unsicherheit der Einstellung der Linie  $b_1$  und  $F$  auf die Spaltränder auch nur ausführen konnte.

Die zweite Fläche des Prismas, welche dem durch den Ocularspalt blickenden Auge zum Theil sichtbar war, wurde mit einem weissen Pigmente bedeckt. Nach mannigfachen vergeblichen Versuchen, ein immer wieder in genau demselben Tone reproducirbares weisses Pigment herauszufinden, nahm ich nach einem Vorschlage meines Collegen Hrn. Dr. E. Hagen Papier, welches wenige Secunden lang über die Flamme eines brennenden Magnesiumdrahtes gehalten worden und sich dadurch mit einer feinen Schicht von Magnesiumoxyd belegt hatte. Dieses so behandelte Papier besitzt eine ungemein zarte und schöne weisse Färbung, lässt sich sehr leicht und immer wieder in genau derselben Farbennuance herstellen, sodass ich es als „Normalweiss“ für alle physiologisch-optischen Versuche vorschlagen möchte. Man hat bei seiner Benutzung nur darauf zu achten, dass es von weissem Wolkenlichte und nicht etwa von bläulichem Himmels-

lichte oder dem Lichte der übrigen Umgebung erleuchtet wird. Ich erzielte dieses in einfacher Weise durch einen Hohlspiegel, vermittelt dessen ich ein Bild der Wolken unmittelbar auf der Papierfläche entwarf. Alles übrige Licht war abgeblendet. Aenderungen in der Intensität dieser Beleuchtung wurden durch theilweise Bedeckung des Hohlspiegels mit mattschwarzem Papier oder durch Anwendung von Hohlspiegeln mit anderer Brennweite hervorgebracht.

Die Erleuchtung des Collimatorspaltes geschah bei den Beobachtungen, von welchen zunächst die Rede sein wird, durch eine immer auf derselben Höhe gehaltene Leuchtgasflamme eines Argandbrenners, der immer genau auf derselben Stelle stand. Der Collimatorspalt war so schmal, dass bei einfallendem Sonnenlichte die *D*- und *b*-Gruppe sich deutlich in zwei, resp. drei Linien auflösten. Er blieb ebenso wie der Ocularspalt während der ganzen Untersuchung unverändert, sodass also die Helligkeit der (fast) monochromatisch leuchtenden Prismenfläche immer dieselbe war.

Der Gang einer Bestimmung war nun folgender:

Der Apparat wurde so eingestellt, dass ungefähr die Wellenlänge  $495 \mu\mu^1$  einstand. Der durch den Ocularspalt blickende Rothgrünverwechsler liess dann nach seiner Angabe durch eine zweite Person die Intensität des mit dem weissen Pigmente belegten Feldes so lange ändern, bis ihm dieses mit dem monochromatischen Felde gleich hell erschien. Sodann suchte er durch Drehen der Mikrometerschraube, also durch Aenderung der (mittleren) Wellenlänge des letzteren, die Nuancen beider Felder gleich zu machen, wobei manchmal noch eine kleine Aenderung der Beleuchtung des weissen Pigmentes nachträglich erforderlich wurde. Während dieser Einstellung blickte ich durch das zur Scalenablesung, d. h. zur Bestimmung der (mittleren) Wellenlänge benutzte Fernrohr und erfuhr dadurch in jedem Momente, welche Wellenlängen durch den Ocularspalt gingen, also von dem Farbenverwechsler mit dem weissen Pigmente verglichen wurden. Es gewährte einen sehr interessanten An-

1)  $\mu\mu$  = Milliontelmillimeter. Siehe H. Kayser, Lehrbuch der Spectralanalyse. Berlin 1883. p. 11.

blick, wie derselbe mit seiner Einstellung anfänglich in grösseren, dann aber bald sehr klein werdenden Amplituden um den schliesslich als den richtigen bezeichneten Scalentheil hin- und herschwankte. Eine solche Einstellung dauerte nur wenige Minuten. Dieser Scalentheil wurde dann zur Berechnung der Wellenlänge notirt, darauf der Hohlspiegel weggenommen, das Collimatorrohr etwas verstellt und nun dieselbe Beobachtung von neuem begonnen.

Von sämtlichen mir zur Verfügung stehenden dreizehn Rothgrünverwechslern liess ich je acht solcher Einstellungen machen, und zwar mit jedem Auge vier. (Nur einer [Hr. Schw.] musste sämtliche acht Einstellungen mit dem rechten Auge machen, da sein linkes Auge eine zu geringe Sehschärfe besass.) Die für jedes der beiden Augen getrennt berechneten Werthe für die Wellenlänge  $\lambda_n$  des neutralen Punktes wichen nur sehr wenig voneinander ab, in den meisten Fällen um weniger als die Summe der für jede Gruppe sich ergebenden wahrscheinlichen Fehler des Resultates. Ich habe daher hier die Abweichungen zwischen den beiden Augen des Individuums nicht berücksichtigt und alle acht Einstellungen zu einer Beobachtungsreihe zusammengezogen.

Die dann erhaltenen Resultate waren folgende:

$\lambda_n$		$\lambda_n$
1) Hr. Dr. W. = $491,70 \pm 0,09$	8) Hr. Le. = $496,08 \pm 0,40$	
2) „ Dr. K. = $492,04 \pm 0,09$	9) „ Schw. { = $497,37 \pm 0,48$	
3) „ Dr. B. = $492,25 \pm 0,19$	{ = $497,68 \pm 0,34$ )	
4) „ Dr. S. = $493,08 \pm 0,13$	10) „ R. H. = $497,66 \pm 0,14$	
5) „ Dr. C. = $493,80 \pm 0,36$	11) „ E. W. = $499,44 \pm 0,20$	
6) „ Lu. = $495,92 \pm 0,36$	12) „ W. H. = $499,71 \pm 0,16$	
7) „ Dr. F. = $496,01 \pm 0,23$	13) „ J. P. = $504,75 \pm 0,15$	

Bedenkt man, dass der Abstand der beiden D-Linien gleich  $0,60 \mu$  ist, so wird man die Zuverlässigkeit der gewonnenen Werthe für  $\lambda_n$  als eine sehr hohe bezeichnen dürfen. Jedenfalls zeigt sich aus diesen Resultaten, dass die Lage des neutralen Punktes bei den verschiedenen Indivi-

1) Mehrere Tage später als die erste Messung ausgeführt.

duen continuirlich ineinander übergeht, und die Werthe von  $\lambda_n$  sich nicht etwa in zwei gesonderte Gruppen trennen lassen.

Ich habe oben die Rothgrünverwechsler nach zunehmender Wellenlänge ihres neutralen Punktes geordnet und erwähne nun, dass die Individuen 1), 3), 4), 5), 9) und 10) „Rothblinde“, die übrigen „Grünblinde“ waren. Es geht daraus hervor, dass bei den „Rothblinden“ nicht überall kleinere Werthe für  $\lambda_n$  gefunden wurden, als bei den „Grünblinden.“ Eine scharfe Trennung dieser beiden Classen ist also aus meinen Untersuchungen nicht zu folgern, vielmehr das Gegentheil.

Wegen der von mir und zum Theil auch der von Hrn. Donders<sup>1)</sup> erhaltenen Werthe für  $\lambda_n$  kann ich nicht der aus den Anschauungen der Herren E. Hering<sup>2)</sup> und W. Preyer<sup>3)</sup> zu ziehenden Schlussfolgerung beipflichten, dass die neutralen Punkte der Rothgrünverwechsler im „Urgrün“ liegen, d. h. an derjenigen Stelle im Spectrum, welche besonders bei grosser Intensität im normalen Auge den reinsten Eindruck von Grün mache. Ich glaube, dass kein Besitzer eines trichromatischen Systemes Licht von der Wellenlänge 491 bis 500  $\mu\mu$  für „rein-grün“ erklären wird. Bei der der Wellenlänge 504  $\mu\mu$  ( $\lambda_n$  für Hrn. J. P.) kann man allerdings zweifelhaft sein.

Mit der vorstehenden Bemerkung beabsichtige ich keineswegs, die Unvereinbarkeit meiner Ergebnisse mit der von Hrn. E. Hering aufgestellten Theorie der Gegenfarben auszusprechen; ich muss vielmehr zugeben, dass die bei der

1) A. J. v. d. Weyde, Methodisch onderzoek der Kleurstelsels van Kleurblinden. Inaug.-Dissert. Utrecht 1883. Abgedruckt in den Onderzoekingen, gedaan in het physiol. laboratorium der Utrechtsche Hoog-school. 7. 3. reeks p. 16. 1882.

2) E. Hering, Wien. Ber. vom 15. Mai 1874 und Zur Erklärung der Farbenblindheit aus der Theorie der Gegenfarben. Prag 1880.

3) W. Preyer, Centralbl. für d. med. Wissenschaften 1881. Nr. 1 und Pfüger's Archiv. 25. p. 31. 1881. Letztere Abhandlung ist separat erschienen unter dem Titel: Ueber den Farben- und Temperatursinn mit besonderer Rücksicht auf Farbenblindheit. Bonn 1881.

Lage des neutralen Punktes nach meinen Messungen fehlende Sonderung der Rothgrünverwechsler in zwei Classen in gewisser Beziehung als eine Stütze seiner Anschauungen aufgefasst werden kann.

§ 3. Die Abhängigkeit der Wellenlänge des neutralen Punktes von der Intensität.

Bereits in der Einleitung habe ich darauf hingewiesen, dass Hr. W. Preyer eine Abhängigkeit der Lage des neutralen Punktes von der Intensität aufgefunden hat. Setzen wir die Helligkeit des Spectrums bei kleinsten von ihm benutzten Spaltbreiten = 1, so erhielt er:

Intensität	1,0	1,1	1,2	1,3	1,4	1,6
$\lambda_n$	512,8	511,5	510,3	509,9	507,8	506,6

Hieraus ergibt sich eine lineare functionelle Beziehung zwischen der Intensität und  $\lambda_n$ . Es erschien mir einer genaueren Untersuchung werth, ob bei einer grösseren Aenderung der Intensität diese Abhängigkeit dieselbe bleiben und ferner, ob bei verschiedenen Individuen sich dieselbe Beziehung ergeben würde.

Die Verbreiterung des Spaltes konnte nicht von vornherein als ein zulässiges Mittel zur Erzielung grösserer Intensitäten erachtet werden. Es wurde dadurch nämlich das Spectrum unrein, und es bedurfte des experimentellen Nachweises, dass die Gesammtheit des dann durch den Ocularspalt gehenden Lichtes noch denselben Farbeindruck machte, wie das Licht mittlerer Wellenlänge. Zu diesem Zwecke benutzte ich ein zweites an meinem Apparate angebrachtes Collimatorrohr, welches, von dem Ocularrohre aus betrachtet, eine zu dem früher erwähnten Collimatorrohre symmetrische Stellung hatte. Die durch den Spalt dieses zweiten Collimatorrohres gehenden Strahlen entwarfen nach der Entfernung des weiss-pigmentirten Papiere ebenfalls in der Ebene des Ocularspaltes ein Spectrum, und ein durch den letzteren blickendes Auge sah die früher weisse Fläche nunmehr farbig erleuchtet. Die Bestimmung der Wellenlänge geschah in derselben Weise, wie an dem anderen



Rohre. Zunächst wurden die Constanten  $\alpha$  und  $\beta$  für das Intervall  $b_1 - F$  vermittelt Sonnenlicht bestimmt und dann der Collimatorspekt bei einfallendem Lichte einer Natronflamme nach beiden Seiten genau gleich viel erweitert, sodass das von ihm entworfene Bild ebenso breit wie der Ocularspalt war. Die Intensität des auf den Collimatorspekt fallenden Lichtes konnte durch zwei gegeneinander drehbare Nicol'sche Prismen in beliebiger Weise geändert werden. Es zeigte sich nun, dass bei einer bestimmten Intensität dem durch den Ocularspalt blickenden (sowohl dichromatischen wie trichromatischen) Auge die beiden farbigen Prismenfelder genau denselben Eindruck machten, wenn beide Collimatorrohre auf dieselbe Wellenlänge eingestellt waren. Somit war der Nachweis geliefert, dass die hier vorhandene Unreinheit des Spectrums von keinem messbaren Einfluss auf die Genauigkeit der Bestimmung war. Bezeichne ich die für eine solche Gleichheit erforderliche Intensität mit 1, bei der also sämtliche oben angegebenen Bestimmungen von  $\lambda_n$  gemacht worden, so konnte ich durch Drehen des einen der beiden Nicol'schen Prismen die Intensität bis auf 5 steigern. Durch Ersetzen des Argandbrenners durch ein Knallgaslicht war eine Erhöhung der Intensität bis auf 80 möglich. Die Prüfung der relativen Lichtstärke des Argandbrenners und des Kalklichtes geschah in der sorgfältigsten Weise durch ein Bunsen'sches Photometer unter Anwendung der von Hrn. Rüdorff vorgeschlagenen Spiegelvorrichtung, welche es ermöglicht, beide Seiten des theilweise geölten Papierees zugleich zu überblicken.

Bei dreien der bereits oben erwähnten Rothgrünverwechslern, nämlich den Personen 4), 9) und 13), habe ich nun Bestimmungen von  $\lambda_n$  bei verschiedenen Intensitäten vorgenommen und erhielt folgende Resultate:

## Herr Dr. S.

Intens.	1	5	15	80
$\lambda_n$	493,03 $\pm$ 0,13	488,59 $\pm$ 0,28	487,52 $\pm$ 0,17	487,46 $\pm$ 0,24.

## Herr Schw.

Intens.	0,5	1	2	3	5
$\lambda_n$	498,90 $\pm$ 0,50	497,37 $\pm$ 0,48	494,36 $\pm$ 0,13	493,41 $\pm$ 0,30	492,44 $\pm$ 0,30.

Herr J. P.

Intensität	1	5
$\lambda_n$	$504,75 \pm 0,15$	$498,59 \pm 0,18$ .

Die Untersuchung geschah in genau derselben Weise, wie ich sie oben in §. 2 geschildert habe. Wegen der Benutzung des anderen Collimatorrohres war hier die früher monochromatisch leuchtende Prismenfläche mit dem weissen Pigmente bedeckt. Zur Beleuchtung des letzteren mussten bei den hohen Intensitäten Hohlspiegel von grosser Apertur genommen werden, um gleiche Intensität mit der anderen Prismenfläche herzustellen, und auch selbst dann gelang es mir nur bei besonders hell erleuchtetem Wolkenhimmel, wodurch es sich erklärt, dass nur bei einem der Rothgrünverwechsler die Bestimmung von  $\lambda_n$  bei den Intensitäten 15 und 80 vorgenommenen wurde.

In der beigegebenen Fig. 1 habe ich sämmtliche erhaltenen Resultate graphisch dargestellt. Als Abscissenaxe ist das normale Spectrum von der Wellenlänge 505 bis 485  $\mu$  aufgetragen und als Ordinaten sind die Intensitäten benutzt. Die durch die Punkte horizontal hindurch gelegten kleinen Linien bezeichnen ihrer Grösse nach den für den betreffenden Werth von  $\lambda_n$  aus den gemachten acht Beobachtungen sich ergebenden wahrscheinlichen Fehler des Resultates. Da bei der Intensität Eins mehrere dieser Linien bei genau richtiger Aufzeichnung ineinander übergreifen würden, so habe ich hier der Deutlichkeit halber einige der Punkte etwas höher, andere etwas niedriger eingetragen.

Diese graphische Aufzeichnung lehrt neben der mangelnden Scheidung der Rothgrünverwechsler in zwei Gruppen, dass die Form der Curven, welche bei demselben Individuum die Abhängigkeit zwischen der Wellenlänge des neutralen Punktes und der Intensität darstellt, bei allen drei beobachteten Personen dieselbe ist. Bei geringen Intensitäten geschieht das Vorrücken nach dem blauen Ende des Spectrums ziemlich schnell, bei den grössten benutzten Intensitäten tritt aber fast völliger Stillstand ein.

Berlin, Physikal. Inst. der Univ. November 1883.

# **X. Ueber die Empfindlichkeit des normalen Auges für Wellenlängenunterschiede des Lichtes;**

von Arthur König  
und Conrad Dieterici.

(Hierzu Taf. VIII Fig. 2.)

Untersuchungen, die einer von uns<sup>1)</sup> über den neutralen Punkt im Spectrum der Rothgrünverwechsler durchgeführt hatte, ergaben eine ausserordentliche Empfindlichkeit des dichromatischen Auges für Verschiedenheiten der Wellenlänge des Lichtes in diesem Punkte. Bei den dreizehn untersuchten Personen lag der aus acht Einzelbeobachtungen berechnete wahrscheinliche Fehler der Wellenlängenbestimmung ihres neutralen Punktes zwischen  $\pm 0,09$  und  $\pm 0,5$  Milliontel-Millimeter. Dieses auffallende Ergebniss veranlasste uns, auch die Empfindlichkeit des normalen Auges für Verschiedenheiten der Wellenlängen des Lichtes im Verlaufe des ganzen Spectrums zu untersuchen. Allerdings war dieselbe schon Gegenstand mehrerer Untersuchungen gewesen. Hr. Mandelstamm<sup>2)</sup> hat ein Spectrum durch die Platten des Ophthalmometers ohne Benutzung des Oculars betrachtet und durch Neigung derselben gegeneinander eine derartige relative Verschiebung der oberen und unteren Hälfte bewirkt, dass zwischen den aneinander grenzenden Theilen ein eben merklicher Farbenunterschied vorhanden war. Aus der hierzu erforderlichen Neigung liess sich dann der zugehörige Wellenlängenunterschied berechnen. Dieselbe Methode hat Hr. Dobrowolsky<sup>3)</sup> mit geringen Abänderungen zu demselben Zwecke angewendet. In beiden Arbeiten war die Empfindlichkeit des Auges an denselben acht Stellen im Spectrum geprüft, aber nicht so gross gefunden, wie sie sich bei den oben erwähnten Farbenblinden ergeben hat. Das

1) A. König, Verhandlungen d. phys. Gesellschaft in Berlin, 1883. Nr. 4 und Nr. 14. Ausführlicher in der p. 567 dieses Bandes veröffentlichten Abhandlung.

2) Mandelstamm, Graefe's Arch. 13. (2) p. 399. 1867.

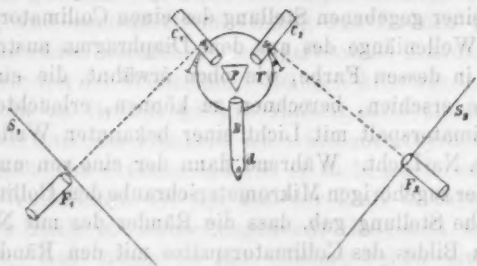
3) Dobrowolsky, Graefe's Arch. 18. (1) p. 66. 1872.

letztere gilt auch von einer in neuester Zeit erschienenen Arbeit des Hrn. Peirce<sup>1)</sup> über denselben Gegenstand, in welcher zwar eine andere Methode in Anwendung kommt, das Princip jedoch festgehalten wird, die Empfindlichkeit des Auges zu ermitteln aus einer noch eben wahrnehmbaren Farbenverschiedenheit zweier Streifen des Spectrums. Die in dieser Arbeit gegebene Empfindlichkeitscurve ist das Mittel aus den Beobachtungen an einer grösseren Anzahl von Personen; und da man von vornherein nicht annehmen darf, dass die Vertheilung der Empfindlichkeit im Spectrum bei den verschiedenen Personen dieselbe ist, so können die in dieser Arbeit veröffentlichten Resultate nicht als eine abschliessende Beantwortung der vorliegenden Frage betrachtet werden. Wir nahmen daher den Gegenstand wieder auf mit der Absicht, die Empfindlichkeit des Auges für Wellenlängenverschiedenheiten an möglichst vielen Stellen im Spectrum bei verschiedenen Intensitäten für uns beide zu ermitteln. Dabei erschien es uns vortheilhaft, das bisherige Princip, die Empfindlichkeit zu folgern aus einem eben noch wahrnehmbaren Farbenunterschied zweier nebeneinander liegender einfarbiger Felder, fallen zu lassen, vielmehr als Maass der Empfindlichkeit den aus vielen Einstellungen auf Gleichheit berechneten mittleren Fehler einer Beobachtung zu nehmen, da er angibt, mit welcher Genauigkeit man an dieser Stelle des Spectrums aus der Farbenempfindung Gleichheit der Wellenlängen des Lichtes beurtheilt.

Der Apparat, dessen wir uns bei der vorliegenden Untersuchung bedienten, war ein Spectralapparat, auf dessen Tischen *T* ein gleichseitiges, auf allen drei Seiten geschliffenes Prisma *P* unverschiebbar fest stand (vgl. Figur p. 581). Zwei Collimatorröhren  $C_1$  und  $C_2$  konnten mittelst Mikrometerschrauben um die Axe des Apparates gedreht werden; sie trugen an einem Ende Spalte, die in der Brennebene ihrer Objectivlinsen lagen, und deren Breite und Richtung beliebig geändert werden konnte. Das Beobachtungsfernrohr *B*, auf einem mit dem Fusse des Apparates fest verbundenen Arme ruhend,

1) B. O. Peirce, Sill. Journ. 26. p. 299. 1883.

war gegen eine Kante des Prismas gerichtet, sodass diese den verticalen Durchmesser der Objectivfassung bildete. In der Brennebene desselben befand sich ein Diaphragma  $d$ , welches einen verticalen durch Schrauben von aussen regulirbaren Spalt enthielt; dieser war den Spalten der Collimatorröhren parallel. Das Ocular  $o$  war mit einer kurzen Hülse



nur übergeschoben und konnte leicht abgenommen werden. Erleuchtet man bei passender Stellung einen der Collimatorspalte, so entsteht in der Ebene des Diaphragmas  $d$  ein Spectrum, und es wird nur der auf den Spalt desselben auffallende Theil hindurchgelassen. Mit dem Ocular betrachtet, sieht man dann den Diaphragmaspalt in der Farbe des durchgelassenen Lichtes; nimmt man aber das Ocular ab und bringt das Auge an das Diaphragma, so sieht man die eine Prismenfläche erleuchtet mit derselben Farbe. Wegen der geringen Breite des Diaphragmaspaltes, welche in unserer Anordnung  $\frac{1}{50}$  der Länge des sichtbaren Spectrums betrug, ist dieses Licht fast homogen, und sein physiologischer Eindruck kann nach einem bekannten Gesetze der Farbmischung gleich gesetzt werden dem der Wellenlänge des mittleren Strahles. Durch Aenderung der Stellung der Collimatorröhre wird das in der Diaphragmaebene entworfene Spectrum verschoben, dadurch ein anderer Theil desselben von dem Diaphragmaspalt ausgeschnitten, und dementsprechend ändert sich die Farbe der Prismenfläche. Erleuchtet man den zweiten Collimatorspalt, so tritt dieselbe Erscheinung ein, nur ist, durch das Diaphragma direct betrachtet, die

zweite Prismenfläche einfarbig erleuchtet. Durch geeignete Einstellung der Collimatorröhren kann die Farbe beider Prismenflächen gleich gemacht werden.

Auf die beiden Collimatorröhren hatten wir zwei kleine Spiegel  $s_1$  und  $s_2$  fest aufge kittet, welche das Bild zweier in etwa 2 m Entfernung aufgestellten Scalen  $S_1$  und  $S_2$  in zwei mit Fadenkreuz versehene Fernrohre  $F_1$  und  $F_2$  zurückwarfen. Um bei einer gegebenen Stellung des einen Collimators  $C_1$  die mittlere Wellenlänge des aus dem Diaphragma austretenden Lichtes, in dessen Farbe, wie oben erwähnt, die eine Prismenfläche erschien, berechnen zu können, erleuchteten wir den Collimatorspalt mit Licht einer bekannten Wellenlänge, also, etwa Na-Licht. Während dann der eine von uns durch Drehen der zugehörigen Mikrometerschraube dem Collimator  $C_1$  eine solche Stellung gab, dass die Ränder des mit Na-Licht gefärbten Bildes des Collimatorspaltes mit den Rändern des Diaphragmaspaltes, welcher mit dem aufgesetzten Ocular betrachtet wurde, zusammenfielen, las der andere den bei jeder Einstellung mit dem Fadenkreuz im Fernrohre  $F_1$  zusammenfallenden Scalenthail der Scala  $S_1$  ab. Aus diesen Randeinstellungen wurde der mittlere Scalenthail berechnet, der derjenigen Stellung der Collimatorröhre  $C_1$  entsprach, bei welcher das Spaltbild gerade in der Mitte des Diaphragmaspaltes lag. Dies Verfahren wurde für Licht der Li-, Na-, Tl-, Sr- und K $_{\beta}$ -Linie für beide Collimatorröhren wiederholt. Setzt man in der Cauchy'schen Dispersionsformel:

$$n = \alpha + \frac{\beta}{\lambda^2},$$

für  $\lambda$  die bekannte Wellenlänge einer Lichtart, für  $n$  den dazugehörigen Scalenthail ein, was gestattet ist, weil die Aenderung der Scalentheile sehr nahe proportional der der Brechungsexponenten ist, so kann man aus zwei benachbarten Werthen von  $n$  und  $\lambda$  die für dies Intervall geltenden Constanten  $\alpha$  und  $\beta$  bestimmen und mit diesen die zu einem jeden Scalenthail gehörige Wellenlänge berechnen.

Wir beobachteten stets ohne Benutzung des Oculars direct durch das Diaphragma des Beobachtungsrohres  $B$  und suchten zu einer durch Ablesung im Fernrohr  $F_1$  be-



stimmten Stellung des Collimators  $C_1$  diejenige Stellung des Collimators  $C_2$ , bei der die beiden Prismenflächen gleichfarbig erschienen. Ein jeder von uns machte an jeder Stelle des Spectrums 50 solcher Einstellungen auf Gleichheit der Farbe, die der andere am Fernrohr  $F_2$  ablas, und zwar mit beiden Augen abwechselnd und mit mehrmaliger Unterbrechung. Letzteres geschah, weil sonst die Empfindlichkeit durch Ermüdung und namentlich im Gelben und Grünen durch die complementären Nachbilder verringert wurde. Auf diese Weise haben wir von der Wellenlänge  $640\mu\mu$  — hier wie im Folgenden ist die zu Grunde gelegte Einheit Milliontelmillimeter, wofür wir uns des Zeichens  $\mu\mu^1$ ) bedienen werden — also in der Nähe von  $C$  beginnend von 10 zu  $10\mu\mu$  fortschreitend, bis zur Wellenlänge  $430\mu\mu$ , also der Linie  $G$  entsprechend, an jeder Stelle 50 Einstellungen auf Gleichheit der Farbe gemacht. Aus diesen ist der mittlere Fehler einer Beobachtung berechnet.

Bei dieser Berechnung leitete uns folgende Ueberlegung: Angenommen, es sei das Collimatorrohr  $C_1$  so eingestellt, dass im Fernrohr  $F_1$  der der Wellenlänge  $\lambda_m$  entsprechende Scalentheil mit dem Fadenkreuz zusammenfalle, und es seien im Fernrohr  $F_2$  die Scalentheile  $s_1, s_2 \dots s_{50}$  beobachtet, denen nach der Cauchy'schen Formel die Wellenlängen  $\lambda_1, \lambda_2 \dots \lambda_{50}$  zukommen, so wäre bei absoluter Richtigkeit unserer Bestimmung der Wellenlängen der mittlere Fehler einer Beobachtung:

$$\sqrt{\frac{\sum_{p=1}^{p=50} (\lambda_m - \lambda_p)^2}{50}}$$

Die Bestimmung der Wellenlängen beruht auf der Bestimmung der Constanten  $\alpha$  und  $\beta$  der Cauchy'schen Formel; nun wird aber wegen der unvermeidlichen Beobachtungsfehler, das für die Scala  $S_1$  berechnete Werthepaar dieser Constanten fehlerhaft sein, und zwar in anderem Maasse

1) Nach dem Vorschlage von H. Kayser, Lehrbuch der Spectralanalyse p. 11. Berlin 1883.

als das für die Scala  $S_2$  bestimmte. Infolge dessen wird auch  $\lambda_m$ , welches berechnet ist unter Anwendung des einen Werthepaares, in anderem Maasse fehlerhaft sein, als jede der Grössen  $\lambda_p$ , die mit dem anderen Werthepaare der Constanten berechnet sind. Daraus folgt, dass der Mittelwerth von  $\lambda_p$  nicht mit  $\lambda_m$  zusammenfällt, und dadurch:

$$\sum_{p=1}^{p=50} (\lambda_m - \lambda_p)^2$$

stets zu gross erhalten wird. Dieser Fehler ist bei der Kleinheit der gefundenen Fehler von derselben Grössenordnung, er verschwindet aber, wenn bei der Berechnung nur auf ein Collimatorrohr Bezug genommen und  $\lambda_m$  durch den Mittelwerth  $\lambda_0$  von  $\lambda_p$  ersetzt wird, weil dann  $\lambda_0$  und  $\lambda_1 \dots \lambda_{50}$  mit denselben Constanten berechnet sind. Diese Ersetzung sind wir berechtigt vorzunehmen, weil wir annehmen können, dass der Mittelwerth von 50 Einstellungen auf Gleichheit nicht mehr mit einem in Betracht kommenden Fehler behaftet ist. Der dann nur einmal bei der Bestimmung der Constanten  $\alpha$  und  $\beta$  begangene Fehler beeinflusst nun nicht mehr die Grösse des mittleren Fehlers, sondern nur seine Lage, d. h. der für eine gewisse Wellenlänge  $\lambda_m$  gefundene mittlere Fehler gilt für die Wellenlänge  $\lambda_m \pm \epsilon$ , wo  $\epsilon$  eine Grösse ist, die in fast allen Fällen  $1 \mu\mu$  nicht übersteigt.

Unsere Beobachtungen sind bei zwei verschiedenen Intensitäten der Beleuchtung angestellt. Die hohe Intensität wurde in dem lichtstärkeren Theile des Spectrums, also von  $640 \mu\mu$ , etwa der Linie C entsprechend, durch zwei gleiche Gaslampen mit Argandbrennern, die mit ihrer höchsten Intensität brannten, hergestellt und von  $520 \mu\mu$  ersetzt durch das intensive Licht einer Knallgaslampe. Diese stand auf einem besonderen Tisch, dem Beobachtungsfernrohr gegenüber. Zwei Linsen entwarfen von der glühenden Stelle des Kalkcylinders zwei Strahlenbündel, welche nahezu senkrecht zu den Collimatorröhren waren, und an deren Spaltenden gerade vorbeingingen. Hier standen zwei total reflectirende Prismen, welche die Strahlenbündel in die Spalte hinein-

lenkten. Bei passender Stellung der eingeschalteten Linsen wurde das Strahlenbündel auf der reflectirenden Prismenfläche concentrirt und dadurch die Spalte intensiv erleuchtet. Für die niedrige Intensität wendeten wir dieselben Gas-Argandbrenner an, die jedoch passend gedämpft waren; diese Intensität, die etwa  $\frac{1}{2}$  der ersteren war, genügte bis 470  $\mu\mu$ . Von hier wurde dieselbe Knallgaslampe angewendet, den eingeschalteten Linsen aber eine solche Stellung gegeben, dass ein weniger concentrirtes Strahlenbündel auf jedes der Prismen fiel. Im Folgenden geben wir zunächst eine Tabelle der von uns erhaltenen Resultate. Die erste Spalte gibt die Wellenlängen in Milliontelmillimeter ( $\mu\mu$ ), die zweite und dritte für jeden von uns die zugehörigen mittleren Fehler, ausgedrückt in derselben Einheit. Bis zur Wellenlänge 520  $\mu\mu$  haben wir beide die mittleren Fehler bei hoher und niedriger Intensität gleich gefunden. Die vorkommenden Abweichungen waren so gering, dass sie füglich als Beobachtungsfehler zu betrachten waren.

Wellenlänge	Mittlerer Fehler einer Einstellung für beide Intensitäten		Wellenlänge	Mittlerer Fehler einer Einstellung für beide Intensitäten	
	K	D		K	D
640 $\mu\mu$	1,28 $\mu\mu$	1,82 $\mu\mu$	570 $\mu\mu$	0,29 $\mu\mu$	0,31 $\mu\mu$
630 "	1,05 "	1,47 "	560 "	0,40 "	0,32 "
620 "	0,68 "	1,00 "	550 "	0,65 "	0,51 "
610 "	0,56 "	0,78 "	540 "	0,68 "	0,64 "
600 "	0,36 "	0,48 "	530 "	0,65 "	0,62 "
590 "	0,26 "	0,40 "	520 "	0,59 "	0,51 "
580 "	0,27 "	0,36 "			

Wellenlänge	Mittlerer Fehler einer Einstellung			
	für hohe Intensität		für geringe Intensität	
	K	D	K	D
510 $\mu\mu$	0,51 $\mu\mu$	0,38 $\mu\mu$	0,40 $\mu\mu$	0,38 $\mu\mu$
500 "	0,41 "	0,29 "	0,23 "	0,25 "
490 "	0,36 "	0,25 "	0,16 "	0,23 "
480 "	0,33 "	0,23 "	0,28 "	0,26 "
470 "	0,43 "	0,38 "	0,46 "	0,41 "
460 "	0,54 "	0,53 "	0,54 "	0,57 "
450 "	0,82 "	0,57 "	0,44 "	0,40 "
440 "	0,62 "	0,50 "	0,68 "	0,45 "
430 "	0,69 "	0,56 "	1,06 "	0,56 "

Die gefundenen Resultate bestätigen im allgemeinen die von den früheren Beobachtern gefundene Vertheilung der Empfindlichkeit im Spectrum. Bei keinem von uns war ein Unterschied zwischen dem rechten und linken Auge wahrzunehmen.

Unsere Bestimmung der Empfindlichkeit beginnt mit der Wellenlänge  $640 \mu\mu$ , also nicht ganz bei der Linie *C*. Der Grund, weshalb wir dieselbe nicht über die Linie *C* ausgedehnt haben, ist der, dass die Unterschiede der Farbenempfindung, die das Spectrum jenseits dieser Linie hervorruft, nicht durch die Verschiedenheiten der Wellenlängen, sondern lediglich durch Intensitätsdifferenzen bedingt sind. Hr. Peirce<sup>1)</sup>, der seine Curve weiter geführt hat, findet manche Personen bei  $Li_{\alpha} = 670 \mu\mu$  empfindlicher als bei *C*, ebenso ergab sich bei Hrn. Dobrowolsky<sup>2)</sup>, dass sein Auge bei *B* empfindlicher war, als bei *C*; er bemerkt aber zugleich, dass die Erklärung dieser Erscheinung möglicherweise in dem schnellen Abfall der Intensität jenseits *B* zu suchen sei. Wir haben uns durch besondere Versuche davon überzeugt, dass in der That in diesem Theile des Spectrums nur die vorhandenen Intensitätsunterschiede die Verschiedenheiten der Farbenempfindung hervorbringen. Zu dem Zwecke stellten wir die eine Collimatorröhre ein auf den der Wellenlänge  $650 \mu\mu$  entsprechenden Scalentheil und erleuchteten ihren Spalt mit einer Gaslampe; auf den Spalt der anderen Collimatorröhre concentrirten wir sodann das intensive Licht der Knallgaslampe und stellten nun auf Gleichheit ein. Bei mehrfachen Versuchen dieser Art ergab sich, dass bei diesem Verhältniss der Intensitäten Licht von grösserer Wellenlänge als  $710 \mu\mu$  dieselbe Farbenempfindung hervorrief wie jenes Licht der Wellenlänge  $650 \mu\mu$ . Die Grenze des Gebietes der blossen Intensitätsunterschiede im Spectrum fanden wir bei uns an etwas verschiedenen Stellen zwischen den Wellenlängen  $650$  und  $640 \mu\mu$ . Eine Ausdehnung unserer Untersuchung auf diesen Theil des Spectrums hätte also lediglich

1) B. O. Peirce, Sill. Journ. 26. p. 299. 1883.

2) Dobrowolsky, Graefe's Archiv. 1877. p. 66.

die Empfindlichkeit des Auges für Intensitätsunterschiede betroffen.

Es könnte indessen sein, dass die Vertheilung der Intensität im Spectrum auch an anderen Stellen die von uns gefundenen Resultate beeinflusst, also die an einer Stelle gefundene Empfindlichkeit des Auges nicht lediglich von den Wellenlängenverschiedenheiten, sondern auch von den an dieser Stelle vorhandenen Intensitätsdifferenzen bedingt ist. Wenn dies der Fall wäre, so müsste bei gleichmässiger Intensitätsvertheilung über das ganze Spectrum der mittlere Fehler einer Beobachtung an den verschiedenen Stellen wesentlich andere Werthe annehmen. Eine gleichmässige Intensitätsvertheilung ist aber nicht zu erreichen, wohl aber kann man die Intensitätsvertheilung erheblich ändern durch Einschalten passend gewählter farbiger Platten, die an den Stellen des Spectrums Absorptionsstreifen haben, wo die Intensität in einem kleinen Intervall stark variirt. Indem wir dies Verfahren einschlugen, ergaben sich nur so unbedeutende Abweichungen von den früher erhaltenen Resultaten, dass wir zu dem Schlusse berechtigt sind, dass die von uns gefundenen Werthe der mittleren Fehler einer Beobachtung lediglich von den Verschiedenheiten der Wellenlängen abhängen und nicht oder nur unmerklich beeinflusst sind durch die Intensitätsunterschiede.

Zur Veranschaulichung unserer Resultate haben wir in Fig. 2 die in der Tabelle gegebenen Werthe in ein Coordinatensystem eingetragen, dessen Abscissenaxe die Wellenlängen in Milliontelmillimeter gibt, während die Ordinatenaxe die zugehörigen mittleren Fehler einer Beobachtung darstellt. Welchem von uns beiden die verschiedenen Curven angehören, und welcher Intensität sie entsprechen, ist in der Figur selbst eingetragen.

Unsere Curven fallen von  $640\mu\mu$  beginnend in stetiger Neigung bis in die Nähe der Linie D. Hier tritt ein erstes Minimum ein; während es jedoch für den einen von uns (K.) bei  $590\mu\mu$  liegt, erreicht der andere (D.) sein erstes Minimum erst bei  $570\mu\mu$ . Unsere Curven ergeben dann im Grünen eine geringere Empfindlichkeit; in der Nähe der

Linie *E* trennen sich die Empfindlichkeitscurven für die verschiedenen Intensitäten. Die Curven geringer Intensität erreichen beide ein zweites Minimum bei  $490\mu\mu$ , also nahe bei *F*. Dies ist nach unseren Messungen die Stelle der grössten Empfindlichkeit für Wellenlängenverschiedenheiten im ganzen Spectrum; auch Hr. Dobrowolsky findet dieses zweite Minimum tiefer liegend als das erste ( $^{1/740}\lambda_F = 0,65\mu\mu$ ), während in der Curve des Hrn. Peirce dieses Minimum höher liegt ( $1,7\mu\mu$ ). Der Grund dieser Abweichung ist wohl der, dass die Curve des Hrn. Peirce die aus vielen einzelnen für verschiedene Personen ermittelten Curven resultirende ist. Da nun, wie sich das auch bei unserem ersten Minimum bei *D* gezeigt hatte, nicht für alle Personen die Minima aufeinander fallen, so werden Minima und Nichtminima superponirt, woraus eine Erhöhung des absoluten Werthes folgen muss. In der Nähe dieses Minimums liegt nach den bereits erwähnten Messungen des einen von uns der neutrale Punkt im Spectrum der Farbenblinden. Es zeigt sich, dass auch ein mit einem trichromatischen Farbensystem begabtes Auge an dieser Stelle des Spectrums eine annähernd gleiche Empfindlichkeit zeigt, wie das dichromatische. Unsere Curven geringer Intensität steigen dann und erreichen ein drittes Minimum bei  $450\mu\mu$  der Stelle, wo das Indigoblau in Violett übergeht. Sodann steigen die Curven wieder und enden bei  $430\mu\mu$ , also bei der Linie *G*. Weiter zu gehen verhinderte der starke Abfall der Intensität jenseits dieser Linie.

Die Curven hoher Intensität zeigen von dem Punkte, wo sie sich von denen niedriger Intensität trennen, ein im allgemeinen ähnliches Verhalten; bei beiden treten ebenso, wie bei den ersteren, zwei Minima hervor, indessen sind diese gegen die Minima bei geringer Intensität für uns beide in demselben Sinne verschoben. Eine ähnliche Erscheinung zeigt sich bei den Rothgrünverwechslern, bei denen der neutrale Punkt mit steigender Intensität nach dem blauen Ende des Spectrums fortrückt.<sup>1)</sup> Wir unterlassen es, die aus dieser

1) Vgl. W. Preyer, Pflüger's Arch. 25. p. 81. 1881. u. A. König, Verhandl. d. phys. Ges. in Berlin 1883. Nr. 14 und in der vorhergehenden Abhandlung § 3. (p. 576 dieses Bandes.)



Erscheinung, sowie aus dem Vorhandensein des bei uns beiden beobachteten dritten Maximums der Empfindlichkeit im Violetten sich ergebenden Folgerungen auszusprechen, bevor nicht bereits geplante weitere Versuche auch von anderer Seite eine Stütze für dieselbe geliefert haben.

Ob im Violetten jenseits der Linie *G* der Unterschied der Farbenempfindung, ebenso wie im Rothen jenseits der Linie *C* lediglich auf Intensitätsdifferenzen im Spectrum beruht, wollen wir durch weitere Versuche mit Hülfe des Sonnen- oder electrischen Lichtes einer Prüfung unterwerfen.

Die Resultate der vorstehenden Untersuchung lassen sich in Folgendem zusammenfassen:

1. Die Unterschiede der Farbenempfindung im rothen Ende des Spectrums bis etwas über die Linie *C* hinaus sind lediglich durch die vorhandenen Intensitätsunterschiede bedingt.

2. Das Maximum der Empfindlichkeit für Wellenlängenverschiedenheiten im Gelben liegt für beide Beobachter an verschiedenen Stellen des Spectrums.

3. Die beiden anderen Maxima (im Blaugrünen und am Uebergang von Indigo in Violett) liegen bei derselben Intensität für beide Beobachter an denselben Stellen.

4. Sie wandern aber, ebenso wie der in der Gegend des ersteren dieser beiden Maxima liegende neutrale Punkt im Spectrum der Rothgrünverwechsler, mit steigender Intensität nach dem violetten Ende des Spectrums hin.

Berlin, phys. Inst. d. Univ., im Februar 1884.

**XI. Die Metall- und Totalreflexion der isotropen Medien entwickelt im Sinne des Neumann'schen Systemes; von E. Ketteler.**

Es ist mir, meines Erachtens, zunächst im Sinne Fresnel's gelungen, die Gesetze der gewöhnlichen und totalen Reflexion der durchsichtigen Medien und der sogenannten Metallreflexion der absorbirenden Medien in einheitliche Formeln zusammenzufassen.<sup>1)</sup> Auch vom Standpunkte Neumann's ist kürzlich durch Glazebrook<sup>2)</sup> und Voigt<sup>3)</sup> die Theorie der Totalreflexion selbständig und unabhängig von der der gewöhnlichen Reflexion entwickelt worden. Was dagegen die entsprechende Theorie der Metallreflexion angeht, so fehlt eine solche ganz, und ist daher auch das Verhältniss dieser zu den Erscheinungen der durchsichtigen Medien, wie es sich im Sinne der Neumann'schen Grundvorstellung darstellt, ebenso unbekannt.

Seit indess Hr. Kirchhoff<sup>4)</sup> die Grenzbedingungen Neumann's modificirt, und seit ich selber<sup>5)</sup> Uebergangsbedingungen aufgestellt habe, welche die Reflexionstheorien Fresnel's und Neumann's gleichzeitig umfassen, ist es leicht geworden, die vorerwähnte Lücke auszufüllen. Bei der Entwicklung der Gesetze der Metallreflexion kommt es einzig nur darauf an, dass man Schwingungsausdrücke von der Form:

$$\xi = D_x e^{\frac{2\pi}{\lambda} qz} \cos \left[ 2\pi \left( \frac{t}{T} + \frac{zp + x n_1 \sin e}{\lambda} \right) - \chi_x \right],$$

$$\eta = D_y e^{\frac{2\pi}{\lambda} qz} \cos \left[ 2\pi \left( \frac{t}{T} + \frac{zp + x n_1 \sin e}{\lambda} \right) - \chi_y \right],$$

$$\zeta = D_z e^{\frac{2\pi}{\lambda} qz} \cos \left[ 2\pi \left( \frac{t}{T} + \frac{zp + n_1 x \sin e}{\lambda} \right) - \chi_z \right],$$

1) Vgl. u. a. Wied. Ann. 3. p. 83. 1878; und 22. p. 204. 1884. Carl's Repert. 16. p. 261. 1880.

2) Glazebrook, Proc. Cambridge Phil. Soc. 3. p. 330. 1880.

3) Voigt, Gött. Nachr. Febr. 1884. p. 56.

4) Kirchhoff, Abh. d. Berl. Acad. 1876. p. 75.

5) Ketteler, Wied. Ann. 18. p. 682. 1883.

als thatsächlich richtig anerkennt. Die rationelle Herleitung dieser Form und ebenso das Grössenverhältniss zwischen dem Extinctionscoefficienten  $q$ , dem Refractionscoefficienten  $\nu$  und der durch die Beziehungen:

$$(1) \quad p = \nu \cos r = \sqrt{\nu^2 - n_1^2 \sin^2 e}, \quad \nu \sin r = n_1 \sin e$$

definirten Hilfsgrösse  $p$ , welches Verhältniss bekanntlich von Farbe zu Farbe variirt, mag dann vom Standpunkte Neumann's aus einer späteren Zeit überlassen bleiben.

Dies angenommen, hat man die obigen Ausdrücke in die vorerwähnten allgemeinen Uebergangsbedingungen einzuführen. Es genügt zu dem Ende, die in meiner früheren Arbeit<sup>1)</sup> aufgestellten Beziehungen dadurch zu verallgemeinern, dass man den Quotienten:

$$\frac{B_2}{B_1} = \sigma$$

der Aetherconstanten beider Medien, der für das Fresnel'sche System = 1 ist, als vorläufig unbekannte Grösse an die ihm zukommende Stelle einschiebt.

So erhält man für Schwingungen, die der Einfallsebene parallel sind, die beiden Grenzgleichungen ( $\varphi = 2\pi(t/T)$ ):

$$(2) \quad \left\{ \begin{aligned} & \mathfrak{E}_p \sin \varphi + \mathfrak{R}_p \sin(\varphi - \chi_p) \\ &= \frac{\mathfrak{D}'_p}{n_1 \cos e} [p \sin(\varphi - \chi_s) - q \cos(\varphi - \chi_s)], \\ & \mathfrak{E}_p \sin \varphi - \mathfrak{R}_p \sin(\varphi - \chi_p) \\ &= \frac{\sigma \mathfrak{D}'_p}{n_1^2} [(a^2 - b^2) \sin(\varphi - \chi_s) - 2ab \cos(\varphi - \chi_s)]. \end{aligned} \right.$$

Dieselben sind für  $\sigma = 1$  identisch mit den Gleichungen (20). p. 97.

Wenn für das Fresnel'sche System die Grössen  $a$ ,  $b$  Refractions- und Extinctionscoefficient für senkrechte Incidenz bedeuten, so sollen sie hier einstweilen als mathematische Werthe genommen werden, welche mit  $p$ ,  $q$ ,  $e$  durch die Gleichungen:

$$(3) \quad p^2 - q^2 + n_1^2 \sin^2 e = a^2 - b^2, \quad pq = ab$$

verknüpft sind und vielfach zur Erleichterung der weiteren Transformationen dienen.

1) Ketteler, Wied. Ann. 3. p. 95. 1878.

Eliminirt man die laufende Zeit, so lassen sich beide Gleichungen auf die kurze symbolische Form bringen:

$$(2_b) \quad \mathfrak{E}_p + R_p = D_p' \frac{p + q\sqrt{-1}}{n_1 \cos e}, \quad \mathfrak{E}_p - R_p = D_p' \sigma \frac{(a + b\sqrt{-1})^2}{n_1^2}.$$

Analog erhält man für Schwingungen senkrecht zur Einfallsebene:

$$(4) \quad \begin{cases} \mathfrak{E}_s \sin \varphi + \mathfrak{R}_s \sin (\varphi - \chi_s) = \mathfrak{D}_s \sin (\varphi - \chi_s), \\ \mathfrak{E}_s \sin \varphi - \mathfrak{R}_s \sin (\varphi - \chi_s) = \frac{\sigma \mathfrak{D}_s}{n_1 \cos e} [p \sin (\varphi - \chi_s) - q \cos (\varphi - \chi_s)], \end{cases}$$

welche Gleichungen für  $\sigma = 1$  mit den früheren (33) auf p. 102 zusammenfallen.

Dieselben liefern die symbolischen Formen:

$$(4_b) \quad \mathfrak{E}_s + R_s = D_s, \quad \mathfrak{E}_s - R_s = D_s \sigma \frac{p + q\sqrt{-1}}{n_1 \cos e}.$$

Da wir uns hier blos um die reflectirten Wellen kümmern, so sind die Attribute  $D_p'$ ,  $D_s$  des gebrochenen Lichtes zu eliminiren. Dadurch gewinnt man dann die Intensitätsausdrücke:

$$(5) \quad \begin{cases} R_p = \frac{(p + q\sqrt{-1}) n_1 - \sigma \cos e (a + b\sqrt{-1})^2}{(p + q\sqrt{-1}) n_1 + \sigma \cos e (a + b\sqrt{-1})^2} \mathfrak{E}_p, \\ R_s = \frac{n_1 \cos e - \sigma (p + q\sqrt{-1})}{n_1 \cos e + \sigma (p + q\sqrt{-1})} \mathfrak{E}_s. \end{cases}$$

Dieselben stimmen für  $\sigma = 1$  und bei Einführung anderer Variablen mit den von Cauchy aufgestellten Ausdrücken überein.

Wir stellen uns jetzt die Aufgabe, den einzelnen Gliedern dieser Formen solche Werthe zu geben, resp. ihnen eine solche Bedeutung beizulegen, dass dieselben

1. unter gewissen Vereinfachungen unmittelbar in diejenigen Formeln übergehen, die Neumann selbst:

a) für die gewöhnliche Reflexion und

b) für die totale Reflexion

der durchsichtigen Medien aufgestellt hat, und dass dieselben

2. für senkrechte und streifende Incidenz mit den für diese Specialfälle von der Erfahrung besonders bestätigten Cauchy'schen Formeln der Metallreflexion zusammenfallen.

Zu dem Ende sind zwei theoretische Willkürlichkeiten erforderlich, die geraden Weges zum gewünschten Ziele hinführen, und die, wie mir scheint, die einzig möglichen Mittel sind, um dieses Ziel herbeizuführen.

Erstens werden wir annehmen, dass auch im Neumann'schen System die beiden Gleichungen (3) nicht bloß eine mathematische, sondern ebensowohl eine unmittelbar physikalische Bedeutung haben. Mit anderen Worten: Auch vom Neumann'schen Standpunkte aus sind  $\nu$  und  $q$  als mit der Incidenz veränderlich zu nehmen, und sind  $a = \nu_0$  und  $b = q_0$  als deren Specialwerthe anzusehen für  $e = 0$ . Es mag also dereinst etwa gelingen, die Gleichungen (3) als Integrationsbedingungen gewisser Bewegungsgleichungen direct abzuleiten.

Wir werden zweitens annehmen, dass der Quotient  $\sigma$  der beiden Aetherconstanten sich darstellt durch den Ausdruck:

$$(8) \quad \sigma = \frac{n_1^2}{a^2 + b^2},$$

sodass die Constante des zweiten, absorbirenden Mediums gleichzeitig vom Hauptextinctionscoefficienten  $b$  und vom Hauptrefraktionscoefficienten  $a$  abhängen würde. Für  $b = 0$  erhielte dann  $\sigma$  unmittelbar die ihm von Neumann selbst gegebene Form. Auch diese Beziehung mag in Zukunft möglicher Weise bewiesen werden können.

Da für das Fresnel'sche System theoretisch  $\sigma = 1$  ist, und da auch die Gleichungen (3) sich als unmittelbare Folgen der mit demselben in Einklang stehenden neueren Dispersionstheorie darstellen, so fallen für dieses die erwähnten Willkürlichkeiten beide fort.

Führen wir jetzt den vorstehenden Werth von  $\sigma$  in die Ausdrücke (5) ein und entwickeln daraus in bekannter Weise die Werthe für  $R_p$ ,  $\chi_p$  und für  $R_s$ ,  $\chi_s$ . Dann ergibt sich:

Für parallele Schwingungen:

$$(7) \quad \left\{ \begin{aligned} \frac{R_p^2 - R_s^2}{R_p^2 + R_s^2} &= \frac{2p n_1 \cos^2 e}{p^2 + q^2 + n_1^2 \cos^2 e} \cdot \frac{n_1^2 \sin^2 e + (p^2 + q^2)}{a^2 + b^2}, \\ \operatorname{tg} \chi_p &= \frac{2q n_1 \cos e}{p^2 + q^2 - n_1^2 \cos^2 e} \cdot \frac{n_1^2 \sin^2 e - (p^2 + q^2)}{a^2 + b^2}. \end{aligned} \right.$$

Und für senkrechte Schwingungen:

$$(8) \quad \begin{cases} \frac{\mathfrak{E}_s^2 - \mathfrak{H}_s^2}{\mathfrak{E}_s^2 + \mathfrak{H}_s^2} = \frac{2pn_1 \cos e [n_1^2 \sin^2 e + (p^2 + q^2)]}{(p^2 + q^2)n_1^2 + (a^2 + b^2)^2 \cos^2 e} \frac{a^2 + b^2}{n_1^2 \sin^2 e + (p^2 + q^2)}, \\ \operatorname{tg} \chi_s = \frac{2qn_1 \cos e [n_1^2 \sin^2 e - (p^2 + q^2)]}{(p^2 + q^2)n_1^2 - (a^2 + b^2)^2 \cos^2 e} \frac{a^2 + b^2}{n_1^2 \sin^2 e - (p^2 + q^2)}. \end{cases}$$

Jeder dieser Ausdrücke zerfällt in zwei Factoren. Der jedesmalige erste Factor entspricht für sich allein dem Fresnel'schen System, mit der Bedingung jedoch, dass die angehängten  $p, s$  gegen einander vertauscht werden; die zweiten Factoren sind zu je zweien reciprok. Schreiben wir daher:

$$(9) \quad \begin{cases} \left( \frac{\mathfrak{E}_p^2 - \mathfrak{H}_p^2}{\mathfrak{E}_p^2 + \mathfrak{H}_p^2} \right)_N = \left( \frac{\mathfrak{E}_s^2 - \mathfrak{H}_s^2}{\mathfrak{E}_s^2 + \mathfrak{H}_s^2} \right)_F \cdot f_1, & \operatorname{tg} (\chi_p)_N = \operatorname{tg} (\chi_s)_F \cdot f_2, \\ \left( \frac{\mathfrak{E}_s^2 - \mathfrak{H}_s^2}{\mathfrak{E}_s^2 + \mathfrak{H}_s^2} \right)_N = \left( \frac{\mathfrak{E}_p^2 - \mathfrak{H}_p^2}{\mathfrak{E}_p^2 + \mathfrak{H}_p^2} \right)_F \cdot \frac{1}{f_1}, & \operatorname{tg} (\chi_s)_N = \operatorname{tg} (\chi_p)_F \cdot \frac{1}{f_2}. \end{cases}$$

$$(10) \quad \begin{cases} f_1 = \frac{n_1^2 \sin^2 e + (p^2 + q^2)}{a^2 + b^2} = \sqrt{1 + \frac{4q^2 n_1^2 \sin^2 e}{(a^2 + b^2)^2}}, \\ f_2 = \frac{n_1^2 \sin^2 e - (p^2 + q^2)}{a^2 + b^2} = \sqrt{1 - \frac{4p^2 n_1^2 \sin^2 e}{(a^2 + b^2)^2}}, \end{cases}$$

wo die beiden letzten Beziehungen ohne Schwierigkeit aus den Gleichungen (3) entwickelbar sind, so folgt sonach, dass das Product des ersten und dritten und ebenso das Product des zweiten und vierten der Ausdrücke (9) für Fresnel und Neumann identische Werthe haben.

Aus dieser Gleichheit lässt sich eine bemerkenswerthe Folgerung ziehen. Bildet man den Ausdruck für den Phasenunterschied des parallel und senkrecht zur Einfallsebene schwingenden Lichtes:

$$\operatorname{tg} (\chi_p - \chi_s) = \frac{\operatorname{tg} \chi_p - \operatorname{tg} \chi_s}{1 + \operatorname{tg} \chi_p \operatorname{tg} \chi_s},$$

so ist der Nenner dieses Bruches von der speciellen Auffassungsweise unabhängig. Nun ist bekanntlich für das Fresnel'sche System:

$$\operatorname{tg} (\chi_p - \chi_s) = \frac{\Phi}{(p^2 + q^2) \cos^2 e - n_1^2 \sin^2 e},$$



wo  $\Phi$  eine gewisse Function von  $p, q, n_1, e$  bedeutet. Diese Form trifft daher auch für das Neumann'sche System noch zu, wenn der bezügliche Zähler  $\Phi_F$  durch  $\Phi_N$  ersetzt wird. Man ersieht so, dass der sogenannte Haupteinfallswinkel in beiden Systemen an die identische Bedingung geknüpft ist:

$$(11) \quad p^2 + q^2 = n_1^2 \sin^2 E \operatorname{tg}^2 E.$$

Was sodann das zugehörige Hauptazimuth betrifft, so gibt bekanntlich das Fresnel'sche System die einfachen Beziehungen:

$$\frac{\Re_p}{\Re_s} = \operatorname{tg} H; \quad \frac{q}{p} = \operatorname{tg} 2H,$$

sodass folgt:

$$p = n_1 \sin E \operatorname{tg} E \cos 2H, \quad q = n_1 \sin E \operatorname{tg} E \sin 2H.$$

Das Neumann'sche System kennt derartig einfache Verhältnisse nicht, vielmehr ist  $\operatorname{tg} H$  nur mittelst äusserst umständlicher Rechnungen zu gewinnen.

Der Grund dieses Verhaltens ist leicht zu erkennen. Während im Fresnel'schen System der Ausdruck (5) für  $R_p$  auf die bekannte, in zwei Factoren spaltbare Tangentenform:

$$R_p = -\frac{\sin(e-r') \cos(e+r')}{\sin(e+r') \sin(e-r')} \mathfrak{E}_p$$

zurückkommt, in welcher das Brechungsverhältniss  $n$  und der Brechungswinkel  $r'$  complexe Werthe erhalten, wird hier die erwähnte Spaltbarkeit um deshalb unmöglich, weil sie eben für  $\sigma$  den wegen der Form der Ausgangsgleichungen (2) und (4) geradezu unmöglichen complexen Werth:

$$\sigma = \frac{n_1^2}{(a+b\sqrt{-1})^2}$$

voraussetzen würde.

Was jetzt weiter das Verhältniss der Metallreflexion zur Reflexion der durchsichtigen Medien betrifft, sowie es sich den Formeln (7) und (8), resp. (9) und (10) entsprechend gestaltet, so wollen wir in ihnen  $b=0$  setzen und die Incidenz  $e$  von 0 bis  $90^\circ$  ansteigen lassen.

Für das Intervall zwischen den Grenzen  $n_1 \sin e = 0$  und  $n_1 \sin e = a$  ist dann wegen  $q=0$  der Factor:

$$(12) \quad f_1 = 1,$$

sodass die erste und dritte der Gleichungen (9) für  $\mathfrak{R}_p$  und  $\mathfrak{R}_s$  nach Neumann und Fresnel identische Ausdrücke liefern, während die Verzögerungen  $\chi_p$  und  $\chi_s$  verschwinden.

Für das Intervall zwischen den Grenzen  $n_1 \sin e = a$  und  $n_1 \sin e = n_1$  wird dagegen  $p = v \cos r = 0$ , folglich der Factor:

$$(13) \quad f_2 = 1.$$

Es verschwinden daher jetzt die Differenzen  $(\mathfrak{E}_p^2 - \mathfrak{R}_p^2)$  und  $(\mathfrak{E}_s^2 - \mathfrak{R}_s^2)$ , sodass die Reflexion eine totale wird. Andererseits erhalten diesmal die Ausdrücke für  $\text{tg } \chi_p$  und  $\text{tg } \chi_s$  nach Neumann und Fresnel identische Formen.

Daraus folgt dann, dass die für undurchsichtige Medien nur nach Fresnel mögliche Spaltung der Tangentenformel für durchsichtige Medien, und zwar für beide Intervalle, auch nach Neumann ausführbar wird.

Im allgemeinen werden auch die Formeln für die Metallreflexion sich in beiden Systemen um so mehr einander nähern, als die Quotienten:

$$\frac{2pn_1 \sin e}{a^2 + b^2}, \quad \frac{2qn_1 \sin e}{a^2 + b^2},$$

sowie der Werth von:  $\cos e$

kleiner und kleiner werden, sodass insbesondere der Voraussetzung zufolge für  $e = 0$  wie für  $e = 90^\circ$  volle Identität besteht.

Bemerkenswerth ist noch, dass für die specielle Incidenz, welche an die Bedingung:

$$(14) \quad p^2 + q^2 = n_1^2 \sin^2 e, \quad f_2 = 0$$

geknüpft ist, und für welche man findet:

$$n_1^2 \sin^2 e = \frac{(a^2 + b^2)^2}{2(a^2 - b^2)},$$

$\text{tg } (\chi_p)_N$  und  $\text{tg } (\chi_s)_F$  zusammenfallen, während dagegen  $\text{tg } (\chi_s)_N$  und  $\text{tg } (\chi_p)_F$  möglichst differiren.

Gehen wir zum Schluss nochmals auf die Ausgangsgleichungen auf p 591 und 592 zurück. Multipliciren wir beispielsweise die beiden Gleichungen (4), so repräsentirt das so gewonnene Product:

$$(15) \quad \left\{ \frac{\sigma \mathfrak{D}_y^2}{n_1 \cos e} [\mathfrak{E}_s^2 \sin^2 \varphi - \mathfrak{R}_s^2 \sin^2 (\varphi - \chi_s) = \right.$$

$$\left. p \sin^2 (\varphi - \chi_p) - q \sin (\varphi - \chi_p) \cos (\varphi - \chi_p) \right]$$

die Gleichung der momentanen lebendigen Kräfte, die zur variablen Zeit  $t$  vom ersten Medium in das zweite übergehen. Man multiplicire jetzt jede Seite desselben mit  $dt$  und integrirte über die Zeiteinheit. Dann ergibt sich für die totalen oder mittleren lebendigen Kräfte die einfache Beziehung:

$$(16) \quad \mathfrak{E}_s^2 - \mathfrak{H}_s^2 = \frac{p\sigma}{n_1 \cos e} \mathfrak{D}_s^2,$$

worin der Symmetrie wegen  $\mathfrak{D}_s$  statt  $\mathfrak{D}_y$  geschrieben ist. Indem hier bezüglich der analogen, für die Parallelschwingungen aus Gleichungen (2) abzuleitenden Beziehung auf die citirte Abhandlung<sup>1)</sup> selbst verwiesen werden mag, setze man unter Beachtung der Definitionsgleichungen (1):

$$\frac{p}{n_1 \cos e} = \frac{v \cos r}{n_1 \cos e} = \frac{v^2 \sin r \cos r}{n_1^2 \sin e \cos e},$$

und führe diesen Werth nebst den beiden oben besprochenen Werthen von  $\sigma$  in die letzte Gleichung ein. Setzt man zunächst nach Fresnel:

$$\sigma = 1,$$

so erhält sonach die Gleichung der mittleren lebendigen Kräfte die Form:

$$(17_F) \quad n_1^2 \sin e \cos e (\mathfrak{E}_s^2 - \mathfrak{H}_s^2) = v^2 \sin r \cos r \mathfrak{D}_s^2.$$

Substituirt man dagegen nach Neumann:

$$\sigma = \frac{n_1^2}{a^2 + b^2},$$

so wird dieselbe:

$$(17_N) \quad n_1^2 \sin e \cos e (\mathfrak{E}_s^2 - \mathfrak{H}_s^2) = \frac{v^2}{a^2 + b^2} \sin r \cos r \mathfrak{D}_s^2.$$

Die Fresnel'sche Form ist identisch mit der bezüglichen Form der durchsichtigen Medien, während die Form Neumann's gänzlich davon abweicht. Da nun, solange wenigstens die Gleichungen (3) als physikalische Gesetze zugelassen werden, ausser etwa der noch specielleren Annahme  $\sigma = n_1^2/a^2$  nur der von uns angenommene Werth von  $\sigma$  zu

1) Ketteler, Wied. Ann. 3. p. 93. 1878.

den von Neumann selbst gegebenen Ausdrücken der gewöhnlichen und totalen Reflexion der durchsichtigen Medien hinführt, so ist jede andere Annahme, (z. B.  $\sigma = n_1^2/v^2$ ,  $\sigma = n_1^2/(v^2 + q^2)$ ) bezüglich dieses Quotienten der beiden Aetherconstanten ausgeschlossen.

Bonn, im Mai 1884.

## XII. *Experimentelle Bestimmung der Wellenlängen im unsichtbaren prismatischen Spectrum;* *von S. P. Langley.*

(Hierzu Taf. IX.)

Bei meinen Versuchen auf Mt. Whitney war ich auf eine bis dahin unbekannte dunkle Bande ( $\Omega$ ) gestossen, deren Ablenkung eine sehr grosse Wellenlänge andeutete. Es bot sich mir damals zur Bestimmung derselben eine der mehr oder weniger zuverlässige Extrapolationsformel dar. Die Cauchy'sche Formel ergab nun das unmögliche Resultat, dass ein Brechungsexponent, wie ich ihn gefunden hatte, bei diesem Prisma nicht möglich sei. Ich wurde dabei auf die grossen Fehler aufmerksam, zu denen die übliche Formel führt.

Jedes Prisma gibt eine verschiedene Darstellung des Spectrums, und wir können die Lage der einzelnen Linien mittelst des „normalen Spectrums“, d. h. der die Wellenlängen direct wiedergebenden Zeichnung bestimmen. Aus praktischen Gründen empfiehlt es sich, für den vorliegenden Zweck dieses normale Spectrum zu benutzen, während es sich z. B. für die Darstellung der Energie an den einzelnen Stellen des Spectrums empfehlen kann, dieselbe als Function der Schwingungszahl, oder des reciproken Werthes der Quadrate der Wellenlänge oder irgend einer anderen Function derselben darzustellen. Obgleich es scheinen könnte, dass wir des prismatischen Spectrums nicht mehr bedürfen, seitdem Rowland seine concaven Gitter construirt hat, so ist dies doch

nicht der Fall, einmal wegen des Uebereinandergreifens der Spectra und dann wegen der so geringen Wärmewirkungen bei Anwendung des Gitters. Könnten wir die Sonnenwärme statt zur Erwärmung zu chemischen Processen verwenden, so wäre ein grosser Vortheil gewonnen, indess erstrecken sich die photographischen Aufnahmen noch nicht über den oberen Theil des grossen infrarothten Gebietes. Das Bolometer kann, wenn es auch weniger empfindlich ist als die Camera, doch dazu dienen, die bestimmten Brechungsexponenten entsprechenden Wellenlängen zu ermitteln und so sichere experimentelle Daten zum Uebergang vom prismatischen Spectrum zum normalen zu gewinnen. Dass man diese so wünschenswerthen Daten bisher noch nicht erhalten hat, liegt an zwei Umständen. 1) Während die Messungen am besten durch vereinte Benutzung von Prisma und Gitter angestellt werden, so wird die Wärme, die schon an sich in den unteren Theilen des prismatischen Spectrums sehr gering ist, fast verschwindend (nur  $\frac{1}{10}$ ), wenn sie auch noch das Gitter passiert ist. Ferner muss ein enger Spalt benutzt werden, um die Wärme zu bestimmen, denn ein breiter würde infolge der Compression des Infraroth durch das Prisma das ganze Gebiet umfassen, welches untersucht werden soll. 2) Wir müssen nicht nur ein Instrument haben, das empfindlicher als die gewöhnliche Thermosäule ist, sondern wir müssen auch eine Methode suchen, um den Punkt zu bestimmen, an dem die Messung vorgenommen wird, selbst wenn dieser Punkt unsichtbar ist.

Die mit dem im Folgenden beschriebenen Apparate erhaltenen Resultate können dazu dienen, für weit ausserhalb der sichtbaren Theile des Spectrums gelegene Regionen entweder eine empirische Formel aufzustellen und die ihr entsprechenden Constanten aufzusuchen, so dass sie innerhalb eines weiten Bereiches gültig ist, oder aber die Genauigkeit der Formeln von Cauchy und Redtenbacher u. a. zu prüfen. Diese, obgleich sie von theoretischer Basis auszugehen behaupten, stimmen doch in ihren Resultaten nur innerhalb der Grenzen des sichtbaren Spectrums, aus dem ihre Constanten ja abgeleitet sind, mit der Erfahrung über-

ein. Sie widersprechen einander, wie das Folgende zeigen wird, sobald sie auch noch für andere Gebiete gelten sollen.

Die erste Aufgabe war, das gegebene Spectrum, das nur für ein bestimmtes Prisma gilt, auf das Normalspectrum zu reduciren.

Die allgemeinen in der vorliegenden Abhandlung gewonnenen Resultate gelten nur für ein einzelnes Prisma. Dass sie nicht auch an anderen geprüft wurden, liegt an der grossen Schwierigkeit der Messungen, sie erforderten mehrere Monate für das eine Prisma, das von Adam Hilger in London hergestellt war.

Die erste Aufgabe war, die Ablenkungen der Strahlen durch das Prisma zu bestimmen, die bestimmten Wellenlängen zukommen, eine Aufgabe, die im sichtbaren Spectrum leicht, im Ultraroth äusserst schwierig ist.

#### Apparat zur Messung dunkler Wellenlängen.

Nach Vorversuchen mit dem Rutherford'schen Gitter benutzte ich ein Rowland'sches concaves mit einem Radius von 1,63 m Krümmung und einer wirkenden Oberfläche von 129 cm. Auf dem Millimeter enthält es 142 Linien, im ganzen 18050. Bei dieser grossen Oberfläche war das Spectrum selbst in den niedrigeren Wellenlängen heiss genug, um den Bolometerstreifen auch nach den verschiedenen Reflexionen mit Absorptionen noch zu afficiren.

Die Anordnung war im allgemeinen so, dass der Strahl zunächst auf das Gitter fiel und dann erst auf das Prisma, dass also die Wellenlänge als die bekannte, die Ablenkung als die unbekannte Grösse betrachtet wurde.

Fig. 1 stellt den endgültig angewandten Apparat schematisch dar und den Verlauf der Lichtstrahlen innerhalb desselben. Die von dem 300 mm grossen ebenen Spiegel des grossen Siderostaten kommenden Lichtstrahlen durchsetzen den Apparat und fallen auf einen Hohlspiegel von 180 mm Oeffnung bei  $M$ , um dann in einem Abstände von etwa 1,5 m in  $S_1$  zu convergiren. In diesem Punkte befindet sich ein verticaler Schlitz, dessen Breite durch eine Schraube verändert werden kann; dabei bewegen sich beide Backen



gleichzeitig, sodass der Mittelpunkt stets an derselben Stelle bleibt. Dieser Schlitz ist gegen die grosse Hitze durch eine Eisenplatte geschützt, in die eine Oeffnung gebohrt ist,

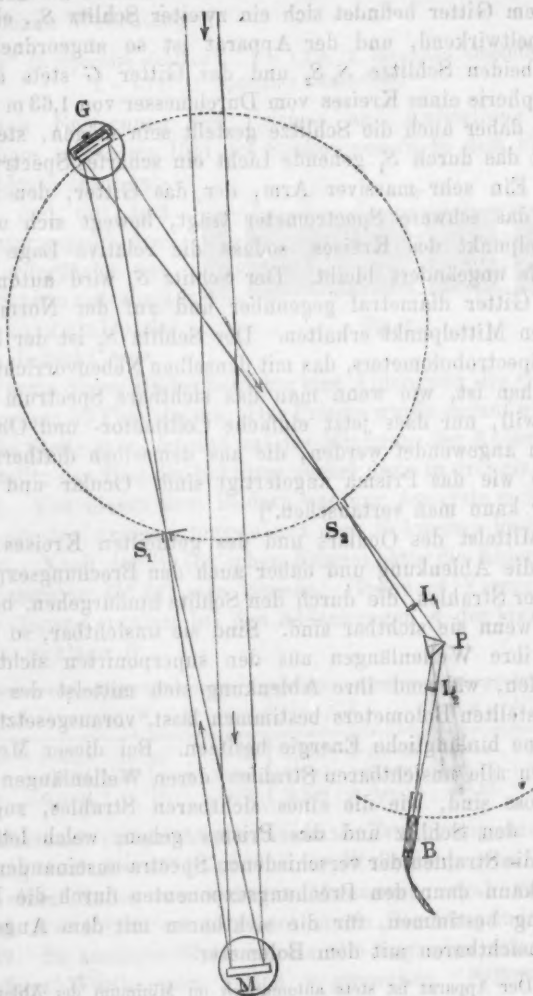


Fig. 1.

welche nur wenig grösser als der Schlitz selbst bei seiner gewöhnlichen Breite ist. Jenseits  $S_1$  divergiren die Strahlen und fallen auf das concave Gitter  $G$ . Gerade gegenüber diesem Gitter befindet sich ein zweiter Schlitz  $S_2$ , ebenfalls doppeltwirkend, und der Apparat ist so angeordnet, dass die beiden Schlitze  $S_1, S_2$  und das Gitter  $G$  stets auf der Peripherie eines Kreises vom Durchmesser von 1,63 m liegen. Wie daher auch die Schlitze gestellt sein mögen, stets entwirft das durch  $S_1$  gehende Licht ein scharfes Spectrum auf  $S_2$ . Ein sehr massiver Arm, der das Gitter, den Schlitz und das schwere Spectrometer trägt, bewegt sich um den Mittelpunkt des Kreises, sodass die relative Lage dieser Theile ungeändert bleibt. Der Schlitz  $S_2$  wird automatisch dem Gitter diametral gegenüber und auf der Normale zu dessen Mittelpunkt erhalten. Der Schlitz  $S_2$  ist der Schlitz des Spectrobolometers, das mit denselben Nebenvorrichtungen versehen ist, wie wenn man das sichtbare Spectrum zeichnen will, nur dass jetzt einfache Collimator- und Objectivlinsen angewendet werden, die aus demselben diathermanen Glase wie das Prisma angefertigt sind. Ocular und Bolometer kann man vertauschen.<sup>1)</sup>

Mittelst des Oculars und des getheilten Kreises kann man die Ablenkung und daher auch den Brechungsexponenten der Strahlen, die durch den Schlitz hindurgehen, bestimmen, wenn sie sichtbar sind. Sind sie unsichtbar, so erhält man ihre Wellenlängen aus den superponirten sichtbaren Strahlen, während ihre Ablenkung sich mittelst des in  $B$  aufgestellten Bolometers bestimmen lässt, vorausgesetzt, dass sie eine hinlängliche Energie besitzen. Bei dieser Methode müssen alle unsichtbaren Strahlen, deren Wellenlängen  $n$ mal so gross sind, wie die eines sichtbaren Strahles, zugleich durch den Schlitz und das Prisma gehen, welches letzteres dann die Strahlen der verschiedenen Spectra auseinander legt; man kann dann den Brechungsexponenten durch die Beobachtung bestimmen, für die sichtbaren mit dem Auge, für die unsichtbaren mit dem Bolometer.

1) Der Apparat ist stets automatisch im Minimum der Ablenkung. Wied. Ann. 19. p. 930.

Als bei einem Versuche am 13. Juni 1882 die Fraunhofer'sche Linie *D* des dritten Spectrums auf den Spalt fiel, traten durch denselben auch noch Strahlen der in Fig. 2 angegebenen Wellenlängen.

$\lambda = 0,589^{\mu}$  (3. Spectrum sichtbar),  $\lambda = 1,178$  (2. Spectrum unsichtbar),  
 $\lambda = 1,767$  (1. Spectrum unsichtbar).

Nach Entfernung des Prismas und Aufstellung des Teleskopes wurde ein Bild des Spaltes von  $S_2$  in dem Focus der Objectivlinse entworfen und mit dem Bolometer geprüft, dessen Vorderfläche von einem Schirm mit einem Schlitz von 2 mm Durchmesser bedeckt war.

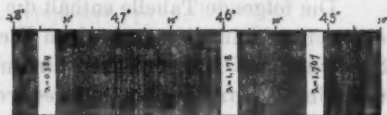


Fig. 2.

Die Wärme dieses Bildes bewirkte eine Ablenkung des Galvanometers um 30 Theilstriche. Das Prisma wurde darauf wieder an seine Stelle gebracht und auf das Minimum der Ablenkung eingestellt; das Bild des Schlitzes zerfiel dann in drei einfache Bilder. Von diesen drei Bildern war nur das erste sichtbar, die Lage der anderen musste mit dem Bolometer bestimmt werden. Nach der Briot'schen Formel hätte die Ablenkung des äussersten  $45^{\circ} 21'$  sein müssen. Genauere Versuche in dieser Gegend ergaben bei den Ablenkungen *A* der Galvanometerausschläge *B*.

$\lambda$	$\alpha$	$n$	$\lambda$	$\alpha$	$n$
$1,010^{\mu} \pm 0,0053$	$46^{\circ} 12'$	1,5654	$1,767^{\mu} \pm 0,0094$	$45^{\circ} 08'$	1,5549
$1,200 \pm 0,0069$	45 54	1,5625	$2,090 \pm 0,0104$	44 45	1,5511
$1,658 \pm 0,0091$	45 16	1,5562	$2,856 \pm 0,0110$	44 25	1,5478

Hiernach entspricht die maximale Erwärmung einer Ablenkung von  $A = 45^{\circ} 10'$  und einer Wellenlänge von  $1,767^{\mu}$ . Aus einer Reihe von weiteren Messungen ergab sich als Mittel  $A = 45^{\circ} 08'$  entsprechend einem Brechungsindex von 1,5549. In analoger Weise werden die folgenden zusammengestellten Werthe von  $\lambda$  und  $n$  gewonnen. Schon oben haben wir angeführt, dass diese Arbeit infolge der geringen

Wärmemengen eine höchst mühevoll war und drei Monate in Anspruch nahm.

Trägt man die oben erhaltenen Resultate graphisch auf und führt eine Curve durch dieselben, so erhält man die „beobachtete“ Curve, die  $n$  als Function von  $\lambda$  darstellt. (Die untere Curve in Taf. IX.)

An der Hand dieser Resultate können wir die Genauigkeit der verschiedenen Formeln prüfen, welche die Brechungsexponenten mit der Wellenlänge verknüpfen.

Die folgende Tabelle enthält die beobachteten Brechungsexponenten und die zugehörigen Wellenlängen im sichtbaren Spectrum des Hilger'schen Prismas. Die Linie  $O$  wurde mit einem Soret'schen fluorescirenden Ocular gemessen; ihre Wellenlänge ist Cornu's Angaben entnommen.

Linie	$\lambda$	$d$	$n$
$A$	0,76000 <sup>u</sup>	46° 49' 05"	1,5714
$C$	0,63618	47 15 45	1,5757
$D_1$	0,58890	47 41 15	1,5798
$b_1$	0,51667	48 21 05	1,5862
$F$	0,48606	48 44 15	1,5899
$H_1$	0,39679	50 34 05	1,6070
$O$	0,34400	53 43 00	1,6266

Die einfachste und am meisten benutzte Formel ist die von Cauchy:

$$n = a + \frac{b}{\lambda^2} + \frac{c}{\lambda^4}.$$

Dieselbe enthält drei Unbekannte. Dieselben wurden aus den Werthen für  $A, D, H$  bestimmt und ergaben:

$$a = 1,5593, \quad b = 0,006775, \quad c = 0,0001137.$$

Mit diesen Constanten gibt sie die Beobachtungen in dem sichtbaren Theile des Spectrums befriedigend wieder. Dies ist nicht mehr der Fall in dem Infraroth. Da  $b$  und  $c$  beide positiv sind, so ist der kleinste Werth, den  $n$  annehmen kann,  $a = 1,5593$ , entsprechend einer Ablenkung von  $45^\circ 35'$ . Die Bolometermessungen zeigen aber, dass sich in diesem Prisma das Sonnenspectrum auch noch nach der Absorption in den verschiedenen durchsetzten Medien bis zu  $45^\circ$  erstreckt, und dass, wenn wir es nicht noch weiter verfolgen können,

dies daran liegt, dass die Wärme durch einen Bestandtheil der Atmosphäre absorbiert wird. Demnach gibt die Cauchy'sche Formel im Ultraroth irrige Resultate und darf nach derselben durchaus nicht extrapoliert werden.

Redtenbacher schlägt die Formel vor:

$$\frac{1}{n^2} = a + b\lambda^2 + \frac{c}{\lambda^2}.$$

Unter Zugrundelegung der Bestimmungen für die obigen Linien geht dieselbe über in:

$$\frac{1}{n^2} = 0,412\,297 - 0,000\,937\,11\lambda^2 - \frac{0,003\,922\,0}{\lambda^2}.$$

Die ihr entsprechende Curve enthält einen Minimumpunkt für  $n = 1,5647$  oder für  $\lambda = 1,430$ . Für jeden Werth von  $n$  grösser als 1,5647 hätte man also zwei reelle Werthe von  $\lambda$ . Briot hat weiter eine von Mouton bestätigte Formel aufgestellt:

$$\frac{1}{n^2} = a + b\left(\frac{n^2}{\lambda^2}\right) + c\left(\frac{n^4}{\lambda^4}\right) + k\left(\frac{\lambda^2}{n^2}\right).$$

Aus den Beobachtungen für die Linien *A, C, F, H* hat Hr. Prof. M. B. Goff freundlichst für mich die folgenden Werthe abgeleitet:

$$a = 0,41028, \quad b = -0,001\,349\,5, \quad c = -0,000\,003\,379, \\ k = +0,002\,232\,9.$$

Eine hieraus abgeleitete Curve ist zusammen mit denen, welche die von Cauchy und Redtenbacher abgeleitete wiedergibt, auf Taf. IX gezeichnet. Aus den Zeichnungen lassen sich ohne weiteres die Abweichungen von diesen Formeln erkennen, welche in der folgenden Tabelle (p. 606) enthalten sind.

Von allen schliesst sich die Briot'sche am vollkommensten den Erfahrungen an, und sie diente dazu, um provisorische Zeichnungen des normalen Spectrums nach dem prismatischen zu entwerfen, ehe der eben besprochene Apparat zur Bestimmung der Wellenlängen der unsichtbaren Strahlen durch directe Messung vollendet war.

Offenbar müssen wir aus den Zahlen in der Tabelle p. 603 und aus der Curve auf Taf. IX, die sie wieder gibt, schliessen, dass wir in Wirklichkeit keine Grenze des infrarothern pris-

n beob.	beob. $\lambda$	Wellenlängen abgeleitet nach							
		Briot		Cauchy		Redtenbacher			
		Werth	Fehler	Werth	Fehler	Werth	Fehler	Werth	Fehler
1,5714	0,760	0,760	0,000	0,760	0,000	0,760	0,000	—	—
1,5697	0,815	0,815	0,000	0,818	0,003	0,820	0,005	—	—
1,5687	0,850	0,850	0,000	0,853	0,003	0,862	0,012	—	—
1,5678	0,890	0,891	0,001	0,900	0,010	0,915	0,025	2,230	1,340
1,5674	0,910	0,911	0,001	0,920	0,010	0,941	0,031	2,170	1,260
1,5668	0,940	0,942	0,002	0,960	0,020	0,990	0,050	2,060	1,120
1,5636	1,130	1,170	0,040	1,270	0,140	imaginär	—	imaginär	—
1,5616	1,270	1,336	0,066	1,730	0,460	—	—	—	—
1,5604	1,860	1,450	0,090	2,460	1,100	—	—	—	—
1,5376	1,540	1,750	0,210	unmöglich	—	—	—	—	—
1,5372	1,580	1,800	0,220	—	—	—	—	—	—
1,5544	1,810	2,105	0,295	—	—	—	—	—	—
—	—	—	—	—	—	—	—	—	—
1,5535	1,870	2,260	0,390	—	—	—	—	—	—
1,5520	1,980	2,460	0,480	—	—	—	—	—	—
1,5515	2,030	2,524	0,494	—	—	—	—	—	—

matischen Spectrums angeben können. Die Curve nähert sich nicht nur nicht asymptotisch der Abscissenaxe, wie es die Cauchy'sche Theorie verlangt, sondern scheint vielmehr, soweit wir es verfolgen können, mit einer geraden Linie zusammenzufallen, welche die Axe unter einem bestimmten endlichen Winkel schneidet, und zwar, wenn wir den Coordinatenanfangspunkt nach  $n = 1$  legen, in einem grossen Abstand von diesem.

Da wir die grosse Gefahr von Extrapolationen in den obigen Beispielen kennen gelernt haben, so wollen wir nur noch die Bemerkung machen, dass bei unserem Prisma die Ablenkungen innerhalb der Beobachtungsgrenzen mit abnehmender Ablenkung mehr und mehr den Wellenlängen proportional werden.

Die angenäherte Grenze des Sonnenspectrums des Hilger'schen Prismas liegt bei  $n = 1,5435$ ; es entspricht dies nach Briot's Formel nahezu  $3,4\mu$ ; aber nach unseren bolometrischen Messungen einer Wellenlänge von  $2,8\mu$ .

Für diesen Punkt ergibt aber die Cauchy'sche Formel unmögliche, die Redtenbacher'sche imaginäre Werthe.

Wellenlängen der kalten Linien im ultrarothern Spectrum.

Von meinen Vorgängern und von mir sind folgende Werthe von kalten Banden im Infrarothe beobachtet worden:



(0,815) nahe an der äussersten Grenze des Sichtbaren scheint mit Abney's  $Z$  und Draper's  $\alpha$  zu coincidiren.

(0,85) stimmt offenbar mit Abney's 0,8540.

(0,89) eine unansehnliche Linie. Abney hat hier eine dicke Linie, entspricht möglicherweise Draper's  $\beta$ .

(0,91) unansehnlich, vielleicht ein Theil von Draper's  $\beta$ .

(0,94) sehr dicke Linie, gibt die äusserste Grenze von Draper's Untersuchungen an und scheint mit der letzten bestimmten Lücke in Lamansky's Curve zusammenzufallen. Nach den Beobachtungen in Allegheny scheint sie tellurischen Ursprungs zu sein.

(1,26) unansehnliche Linie.

(1,35—1,37) sehr hervorragende Bande, fast absolut kalt und schwarz. Sie ist so breit und diffus, dass es schwer hält, ihre Grenzen zu bestimmen. Der kälteste Theil scheint aber eine Wellenlänge von 1,36—1,37 zu haben, (die Beobachtungen Allegheny machen es wahrscheinlich, dass sie tellurischen Ursprungs sei), vielleicht das  $\Psi$  auf Abney's Zeichnungen. Es scheint die äusserste Grenze früherer Untersuchungen zu bilden.

#### Neu entdeckte Linien und kalte Banden.

(1,55 und 1,59) unansehnliche Linien. (1,81 bis 1,87) grosse kalte Bande. Zuerst auf Mount Whitney entdeckt, wahrscheinlich tellurischen Ursprungs. Es ist dies nicht die äusserste Linie, ich habe sie aber mit  $\Omega$  bezeichnet, weil sie die letzte sichtbare Unterbrechung in der Energiecurve darstellt. (1,98—2,04) schwache, aber bestimmte Linien. Die letzte entdeckt mit dem Bolometer. Das beobachtbare Sonnenspectrum dehnt sich aber sicher bis zu einer Wellenlänge 2,70 aus.

#### Vertheilung der Energie in dem normalen Spectrum.

Die Curve  $n = \varphi(\lambda)$  auf der Taf. IX gestattet uns, eine Wellenlängenscala an der Zeichnung des prismatischen Spectrums ohne Extrapolation innerhalb des ganzen Bereiches unserer Beobachtungen anzubringen. Wir können ferner

eine Zeichnung construiren, bei der die Wellenlängen als Abscissen dienen.

Ausgehend von der Curve, welche die Energievertheilung in dem prismatischen Spectrum darstellt, und dem Satz, dass in dem Intervall zwischen zwei Wellenlängen offenbar in dem prismatischen und dem normalen Spectrum dieselbe Energiemenge enthalten sein muss, habe ich die Energiecurve für das normale Spectrum construirt. Die gesammte Energie zwischen den beiden Wellenlängen ist durch die Fläche gegeben, welche von den den beiden Grenzwellenlängen entsprechenden Ordinaten der Energiecurve, dem

Stücke der letzteren zwischen ihnen und der Abscissenaxe begrenzt wird.

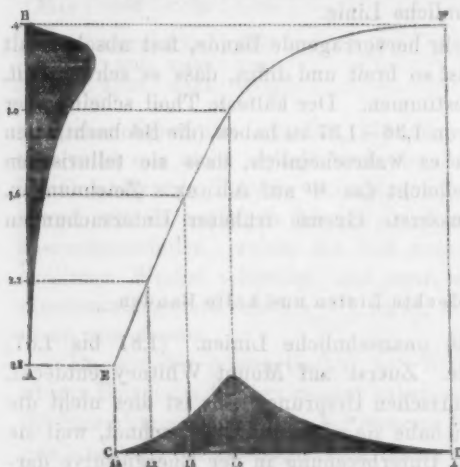


Fig. 3.

Wir tragen auf einer Linie *AB* (Fig. 3) eine passende Länge ab und theilen sie in gleiche Theile, um die normale

Wellenlängenscala darzustellen. Auf einer zu *AB* senkrechten Linie tragen

wir dieselbe Länge ab und theilen sie in dieselbe Anzahl Theile, deren Länge aber dem Gesetz der Dispersion des Prismas entspricht. Dann errichten wir Ordinaten in den Theilungspunkten und bezeichnen sie mit den zugehörigen Wellenlängen, indem wir mit den beiden Linien an den Enden, wo sie am nächsten aneinander liegen, beginnen, wie in der Figur, wo fünf Ordinaten angegeben sind. Durch die Schnittpunkte der entsprechenden Ordinaten ziehen wir die Curve *EF* und über *CD* zeichnen wir die Curve, welche

die Vertheilung der Energie in dem prismatischen Spectrum angibt. Das geschieht in folgender Weise.

Es sei  $a$  Fig. 4 ein sehr kleines Wellenlängenintervall auf der prismatischen Scala,  $c$  dasselbe Intervall auf der normalen Scala,  $b$  und  $d$  seien die mittleren Höhen der Energiecurven über diesen beiden Intervallen, der schattierte Theil der Figur stellt daher den Theil der Gesamtfläche dar, welcher zwischen diesen Grenzen gelegt ist.  $ef$  ist ein Theil der Curve  $EF$  (Fig. 3). Dann ist nach der Bedingung für die Transformation:

$$cd = ab, \text{ also: } b:d = c:a.$$

Aus geometrischen Betrachtungen folgt:

$$c:a = 1:\operatorname{tg} \varphi.$$

Hier ist  $\varphi$  der Winkel, welchen die Sehne  $ef$ , die die Schnittpunkte zweier Ordinatenpaare verbindet, mit  $AB$  macht. Demnach ist:

$$bd = 1:\operatorname{tg} \varphi, \text{ also: } d = 1:\operatorname{tg} \varphi.$$

Sind nun  $a$  und  $c$  unendlich klein, so sind  $b$  und  $d$  die Ordinaten der prismatischen und normalen Energiecurve

für eine bestimmte Wellenlänge, und  $\varphi$  ist der Winkel, welchen die Tangente an  $EF$  an ihrem Schnittpunkte, bildet. Wollen wir demnach die Höhe der normalen Curve für eine gegebene Wellenlänge finden, so müssen wir die entsprechende Ordinate der prismatischen Curve mit  $\operatorname{tg} \varphi$  multipliciren.

Eine solche Construction wurde auf die prismatische Energiecurve des Hilger'schen Prismas angewandt. Die wirkliche normale Energiecurve mit allen ihren Inflexionen, Maximis und Minimis lässt sich leicht nach dieser (punktirten) Grenzcurve der normalen<sup>1)</sup> Energie zeichnen, da die Theile der Ordinate der letzteren oberhalb und unterhalb

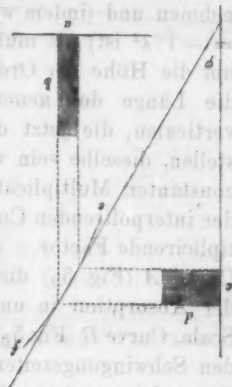


Fig. 4.

1) Wied. Ann. 19, p. 394. 1883. Wo indessen die Maximalordinate der normalen Curve infolge eines Irrthums in der Zeichnung nicht genau in ihrer richtigen Lage bei  $\lambda = 0,55$  angegeben ist.

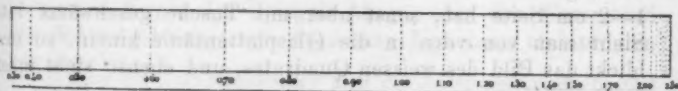
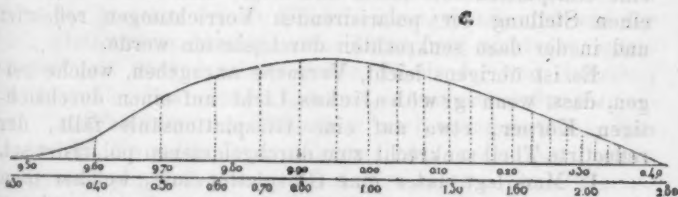
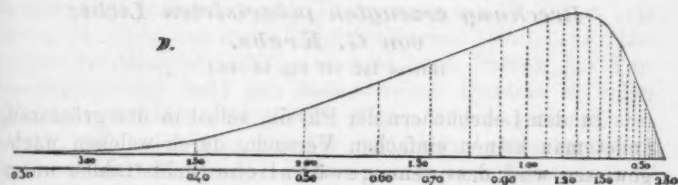
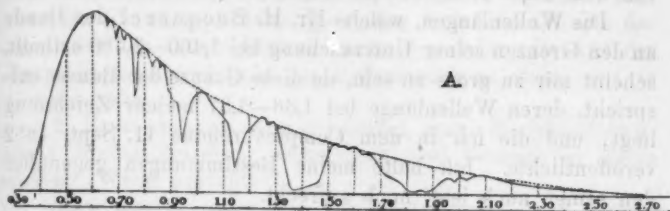
ihrer Schnittpunkte mit der ersteren unregelmässigen Curve sich zu einander verhalten, wie in dem prismatischen Spectrum.

Wollen wir die Vertheilung der Energie nach irgend einer anderen Scala auftragen, etwa so, dass die Abscissen proportional den Schwingungszeiten sind, so kann dies leicht geschehen.

Wir haben in diesem Falle nur  $1/\lambda$  als Abscissen zu nehmen und (indem wir beachten, dass jetzt  $y = 1/\lambda$ ,  $dy/d\lambda = -1/\lambda^2$  ist) als multiplicirenden Factor  $1/\lambda^2$  zu benutzen, um die Höhe der Ordinate in jedem Falle zu erhalten. Soll die Länge der neuen Energiecurve zwischen der Grenzverticalen, die jetzt die Reciproken der Wellenlängen darstellen, dieselbe sein wie die der alten, so müssen wir einen constanten Multiplicator einführen, indem wir die Gleichung der interpolirenden Curve  $y = n/\lambda$  schreiben, sodass der multiplicirende Factor  $-n/\lambda^2$  wird. In der Zeichnung bezeichnet Curve *A* (Fig. 5<sub>A</sub>) die Vertheilung der Sonnenenergie nach der Absorption in unserer Atmosphäre nach der normalen Scala, Curve *B* (Fig. 5<sub>B</sub>) gibt dieselbe Vertheilung entsprechend den Schwingungszeiten. Die Gleichung der interpolirenden Curve ist  $x = 1/\lambda$ . Curve *C* (Fig. 5<sub>C</sub>) gibt die Vertheilung entsprechend  $x = \log \lambda$ .

Curve *D* ( $y = C$ ) (Fig. 5<sub>D</sub>) unterscheidet sich wesentlich von einer der vorhergehenden, und ist ihre Zugrundelegung bisher noch nicht vorgeschlagen worden. Hierbei ist die Grenzcurve eine gerade Linie parallel zur *X*-Axe.

Bei derselben treten die kalten Banden nicht gut hervor; wenn wir aber die allgemeine Vertheilung der Energie betrachten, so finden wir, dass die Curve *D* nicht nur dem conventionellen Charakter der Methoden, welche diese Vertheilung darstellen, erläutert, sondern sie hat auch noch einen praktischen Nutzen. Es ist ohne weiteres klar, dass bei ihr die Gesamtenergie zwischen irgend zwei Wellenlängen direct proportional ist dem Abstand zwischen ihren Ordinaten, gemessen auf der *X*-Axe. Wenn wir z. B. das Verhältniss von der unsichtbaren zu der sichtbaren Wärme bestimmen, so genügt dazu ein Blick auf die Curve *D*.



A. B. Schanz, Del.

Fig. 5A bis D.

Bei den obigen Untersuchungen bin ich aufs ausgiebigste von dem Hrn. J. E. Keeler unterstützt worden.<sup>1)</sup>

Die Wellenlängen, welche Hr. H. Becquerel der Bande an den Grenzen seiner Untersuchung bei 1,460—1,480 ertheilt, scheint mir zu gross zu sein, da diese Grenze der Bande entspricht, deren Wellenlänge bei 1,36—1,37 meiner Zeichnung liegt, und die ich in dem Comptes rendus 11. Sept. 1882 veröffentlichte. Ich halte meine Bestimmungen gegenüber den seinen auch jetzt noch aufrecht.

**XIII. Vorlesungsversuche über die Beziehung  
zwischen dem durch Reflexion und dem durch  
Brechung erzeugten polarisirten Licht;  
von G. Krebs.**

(Hierzu Taf. VII Fig. 13—16.)

In den Lehrbüchern der Physik, selbst in den grösseren, findet man keinen einfachen Versuch, durch welchen nachgewiesen wird, dass wenn gewöhnliche Lichtstrahlen unter dem Polarisationswinkel auf einen durchsichtigen Körper fallen, der reflectirte Theil senkrecht zu dem gebrochenen polarisirt ist. Wohl lässt man bereits polarisirtes Licht auf eine Glasplattensäule fallen und zeigt, dass dasselbe in der einen Stellung der polarisirenden Vorrichtungen reflectirt und in der dazu senkrechten durchgelassen werde.

Es ist übrigens leicht, Versuche anzugeben, welche zeigen, dass, wenn gewöhnliches Licht auf einen durchsichtigen Körper, etwa auf eine Glasplattensäule fällt, der reflectirte Theil senkrecht zum durchgelassenen polarisirt sei.

1. Man legt unter eine Glasplattensäule, welcher man die bekannte geneigte Stellung gegeben (und etwa auf den Nörremberg'schen Polarisationsapparat gesetzt hat), einen Pappdeckelstreifen *ab* (Fig. 13 und 14); derselbe ist mit Papier überzogen, welches in der Mitte ein weisses Quadrat von 1—2 cm Seite hat, sonst aber mit Tusche geschwärzt ist. Sieht man von vorn in die Glasplattensäule hinein, so erblickt das Bild des weissen Quadrates, und ebenso sieht man

<sup>1)</sup> Während der obige Artikel gedruckt wurde, ist ein Artikel von Hrn. H. Becquerel in den Ann. de chim. et de phys. erschienen.



das weisse Quadrat auch, wenn man in verticaler Richtung von oben durch die Glasplattensäule blickt. — Hält man aber ein Turmalinplättchen<sup>1)</sup> vor das Auge, so ist nur das eine oder das andere Bild sichtbar, je nachdem die Axe der Turmalinplatte senkrecht zur Reflexionsebene steht oder in dieselbe fällt.

2. Es ist übrigens gar nicht nöthig, durch die Glasplattensäule hindurchzusehen, wenn man den Versuch in etwas anderer Weise anstellt:

Man schiebt unter die Glasplattensäule einen langen Pappdeckelstreifen (Fig. 15 und 16), welcher, soweit er unter, resp. vor der Glasplattensäule sich befindet, gerade so beschaffen ist, wie vorhin beschrieben (weisses Quadrat auf schwarzem Grund), der aber, soweit er sich hinter der Glasplattensäule befindet, in einer Erstreckung von 15—20 cm, rein weiss ist. Sieht man nun mittelst des Turmalinplättchens schief gegen die Glasplattensäule, so wird beim Drehen des Turmalinplättchens bald das kleine weisse Quadrat in voller Klarheit sichtbar, während das Papier *ac* wie getuscht aussieht, bald aber verschwindet das kleine weisse Quadrat, während der Streifen *ac* vollkommen hell erscheint.

Dieser Versuch ist allerdings nicht mehr so rein und so unmittelbar beweisend, wie der erste; denn man vergleicht jetzt das von dem kleinen weissen Quadrat ausgehende und an der Vorderfläche der Glasplattensäule reflectirte mit dem von der hinteren weissen Fläche *ac* ausgehende und von der Glasplattensäule durchgelassene Licht, und nicht den reflectirten mit dem durchgelassenen Theil der von derselben Lichtquelle, dem weissen Quadrat, ausgehenden Strahlen.

3. Man kann den Versuch 2. auch so umgestalten, dass man die Turmalinplatte beiseite lässt, resp. durch einen schwarzen Spiegel ersetzt. Auf den unteren (den Polarisationspiegel) legt man eine Glasplattensäule (von annähernd gleicher Grösse), was einfach dadurch bewerkstelligt werden kann, dass man an der einen Seite der Fassung der Glasplattensäule zwei Haken anbringt, mittelst deren man sie an die obere Kante des Spiegels hängt. Auf das Fussgestell des Nörremberg'schen Apparates legt man alsdann den

1) Dass ein Turmalinplättchen statt des Zerlegungsspiegels benutzt werden kann, lässt sich schon nach dem ersten Grundversuch über Polarisation (mittelst zweier Spiegel) zeigen.

langen Papierstreifen (Fig. 16), sodass das geschwärzte Stück *ab* gerade unter der Glasplattensäule und das weisse Stück *ac* hinter derselben sich befindet.

Stellt man nun oben auf den Nörremberg'schen Apparat einen geschwärzten Spiegel, so wird beim Drehen desselben bald das kleine weisse Quadrat, bald die hintere weisse Fläche *ac* hervortreten. Zweckmässig wird die weisse Fläche *ac* dem Tageslichte zugekehrt.

4. Um die Erscheinung objectiv darzustellen, lässt man electrisches oder Sonnenlicht durch eine runde Oeffnung von ca. 6 mm Durchmesser, und noch durch eine zweite ebensolche, welche um 2—3 m von der ersten absteht, auf eine Glasplattensäule fallen. Man fängt dann das eine Mal das reflectirte, das andere Mal das durchgelassene Strahlenbündel auf einem Schirm auf, wenn man nicht als Schirm die Decke und die gegenüberliegende Wand des Zimmers benutzen will, und dreht jedesmal ein Turmalinplättchen in dem Strahlenbündel um. Ist an der Fassung des Turmalinplättchens in der Richtung der krystallographischen Axe rechts und links ein mehrere Centimeter langer Stift eingesetzt, so kann der Zuschauer leicht erkennen, bei welcher Lage der Axe das eine und das andere Strahlenbündel verschwindet.

Dass künstliches und Sonnenlicht schon einmal Brechung oder Reflexion erfahren, ehe es auf die Glasplattensäule gefallen, wird dabei ebensowenig beachtet, wie dass das Licht, welches von dem weissen Papier ausgestrahlt wird, auch kein directes, sondern reflectirtes Licht ist.

#### XIV. Ueber einen Gefrierapparat; von E. Lommel.

(Hierzu Taf. VII Fig. 17.)

Veranlasst durch die in einem vorhergehenden Heft der Annalen enthaltene Mittheilung des Hrn. V. Pierre<sup>1)</sup> über einen Apparat, um Wasser unter dem Recipienten der Luftpumpe durch seine eigene Verdampfung möglichst schnell zum Gefrieren zu bringen, erlaube ich mir, auf einen von Hrn. K. Berberich, Präparator am physikalischen Institut der Universität München, construirten und ausgeführten Gefrierapparat aufmerksam zu machen, welcher, obgleich schon 1876 durch Hrn. Prof. v. Jolly im South Kensington Museum

1) V. Pierre, Wied. Ann. 22. p. 143. 1884.

zn London ausgestellt<sup>1)</sup>, nicht so bekannt geworden zu sein scheint, als er es wegen seiner ausgezeichneten Brauchbarkeit zur raschen und sicheren Anstellung des lehrreichen Leslie'schen Versuches verdient. Das Wasser, welches zum Gefrieren gebracht werden soll, befindet sich in einer weitbauchigen, 15 cm im Durchmesser haltenden Glasflasche (*A* Fig. 17), deren Boden es 2—3 cm hoch bedeckt. Von der Flasche führt ein zweimal rechtwinklig gebogenes Glasrohr *b* in die erste Kugel des ebenfalls gläsernen Schwefelsäuregefäßes *B*; dieses besteht nämlich aus zwei Kugeln von je 10 cm Durchmesser, welche durch ein 4 cm weites Rohr von 15 cm Länge miteinander verbunden sind. Von der zweiten Kugel endlich führt eine Glasröhre *c* nach der Öffnung inmitten des Tellers der Luftpumpe *L*. Die Glasröhren *b* und *c*, deren erstere an den Schwefelsäurebehälter angeschmolzen ist, sind in die Mündungen der Flasche und der zweiten Kugel luftdicht eingeschliffen; die Verbindung der Röhre *c* mit der Luftpumpe wird durch Siegelwachs luftdicht verklebt. Das Schwefelsäuregefäß wird von einem passenden Holzgestell getragen; unter die Wasserflasche wird, um ihr besseren Halt zu geben, ein oben cylindrisch abgerundetes Holzklötzchen geschoben. Das Gefäß *B* wird bis zur halben Höhe mit concentrirter Schwefelsäure gefüllt. Setzt man die Pumpe in Thätigkeit, so entwickelt sich zuerst die im Wasser absorbirte Luft, dann kommt das Wasser zum Sieden, und bald darauf, 4 bis 5 Minuten nach Anfang des Versuches, beginnt es zu gefrieren. Dabei stürzt sich der Wasserdampf mit solcher Gewalt auf die Schwefelsäure, dass in der ersten Kugel auf der Oberfläche der Schwefelsäure eine Vertiefung entsteht. Eine Füllung des Schwefelsäurebehälters ist, wenn man denselben verstöpselt aufbewahrt, für fünf Versuche ausreichend. Der Apparat ist, wie man sieht, in seiner Anordnung der Carré'schen Eismaschine ähnlich, eignet sich jedoch vermöge seiner Einfachheit, Uebersichtlichkeit und Durchsichtigkeit besser als diese zur Demonstration und ist insbesondere dadurch ausgezeichnet, dass der Versuch mit jeder guten Luftpumpe angestellt werden kann. Der Apparat ist in vorzüglicher Ausführung von Hrn. Berberich zu beziehen.

1) Biedermann, Ber. über d. Ausstell. wissensch. Apparate im South Kensington Museum zu London, 1876, p. 272. Nr. 1456. London 1877.

### XV. Electrische Einheiten und Lichteinheiten.

In der vom 28. April bis 3. Mai 1884 in Paris versammelten internationalen Conferenz zur Bestimmung der electrischen Einheiten wurden folgende Vorschläge in Betreff der in die Praxis einzuführenden Einheiten angenommen.

Das gesetzliche Ohm ist der Widerstand einer Quecksilbersäule von 0,01 qcm Querschnitt und 106 cm Länge bei der Temperatur 0° C.

Ein Ampère ist der Strom, dessen Stärke gleich 0,1 C. G. S. in electromagnetischem Maasse ist.

Ein Volt ist die electromotorische Kraft, welche einen Strom von einem Ampère in einem Leiter erzeugt, dessen Widerstand das gesetzliche Ohm ist.

Die Einheit des einfarbigen Lichtes ist die Lichtmenge von derselben Farbe, welche in normaler Richtung von einem Quadratcentimeter der Oberfläche von geschmolzenem Platin bei der Erstarrungstemperatur ausgegeben wird.

Die praktische Einheit des weissen Lichtes ist die totale Lichtmenge, welche von derselben Lichtquelle in gleicher Richtung ausgegeben wird.

#### Berichtigungen.

- Bd. XXII. (L. Boltzmann) p. 34 Z. 4 v. u. lies Raume statt Räume.  
 p. 35 Z. 4 v. o. lies  $2 \sin \vartheta \varphi(t) \cos \vartheta d\vartheta$  statt  $\varphi(t) \cos \vartheta d\vartheta$ .  
 „ „ 12 v. o. lies  $2 \sin \vartheta \varphi(t) \cos \vartheta \cdot d\vartheta \cdot s/c \cos \vartheta$  statt  $\varphi(t) \cos \vartheta \cdot d\vartheta \cdot s/c \cos \vartheta$ .  
 „ „ 18 v. o. lies  $4\varphi(t)/c$  statt  $\pi\varphi(t)/c$ .  
 „ 36 „ 15 v. o. lies  $Jvf(t_2) + 4v\varphi(t_2)/c$  statt  $Jvf(t_2) + \pi v\varphi(t_2)/c$ .  
 „ „ 16 v. o. lies  $Jvf(t_1) + 4v\varphi(t_1)/c$  statt  $Jvf(t_1) + \pi v\varphi(t_1)/c$ .  
 „ „ 8 v. u. lies  $+ 4w\varphi(t_1)/c$  statt  $+ \pi w\varphi(t_1)/c$ .  
 „ „ 2 v. u. lies  $(4/c) \cdot d[v\varphi(t)]$  statt  $(\pi/c) \cdot d[v\varphi(t)]$ .  
 „ 37 „ 9 v. o. lies  $(4/c) d[v\varphi(t)] = -Jf(t) dv$  statt  $(\pi/c) d[v\varphi(t)] = -Jf(t) dv$ .  
 „ „ 11 v. o. lies  $a = Jc/4$  statt  $a = Jc/\pi$ .  
 „ 38 „ 1 v. o. lies  $f(t) = \frac{4}{Jc} \left[ t \int \frac{\varphi(t) dt}{t} - \varphi t \right] = \frac{4}{Jc} t \int \frac{\varphi(t) dt}{t^2}$   
 statt  $f(t) = \frac{\pi}{c} \left[ t \int \frac{\varphi(t) dt}{t} - \varphi t \right] = \frac{\pi}{c} t \int \frac{\varphi(t) dt}{t^2}$ .  
 „ „ 5 v. o. lies  $f(t) = 4\varphi(t)/3Jc$  statt  $f(t) = \pi\varphi(t)/3c$ .  
 „ „ 11 v. o. lies  $p = [\varphi(t_2) - \varphi(t_1)] 4/3cJ$  statt  $p = [\varphi(t_2) - \varphi(t_1)] \pi/3c$ .

1.

am-  
tec-  
der  
ck-  
bei

0,1

nen  
sen

cht-  
ang  
ol-  
ird.  
ist  
in

ame.  
t

$\frac{1}{2}$ /e.  
 $\frac{1}{4}$ /e.

df

df

8e.

x

Fig. 1.



Fig. 2.

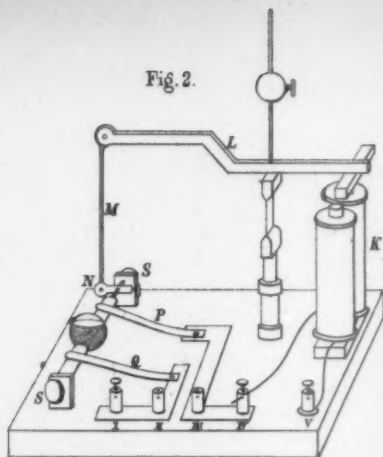


Fig. 4.

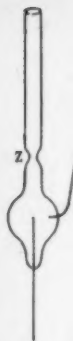


Fig. 10.

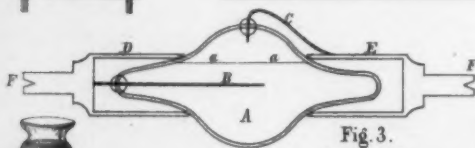


Fig. 3.  
2 1/2 d. nat. Gr.

Fig. 7.



Fig. 6.

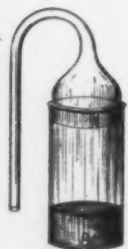


Fig. 13.

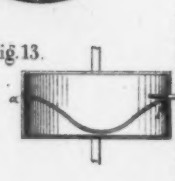


Fig. 5.

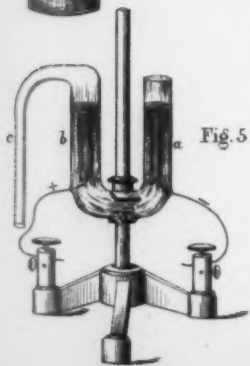


Fig. 12.

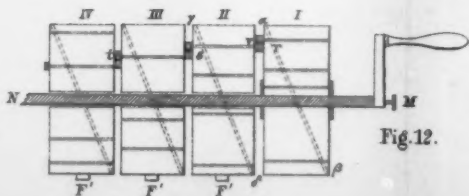




Fig. 4.



Fig. 8.

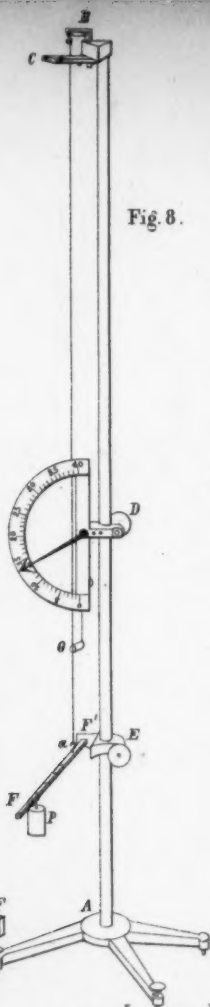


Fig. 9.



Fig. 16.

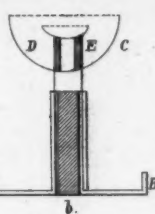
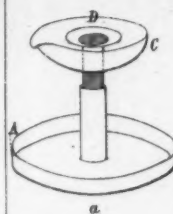


Fig. 15.

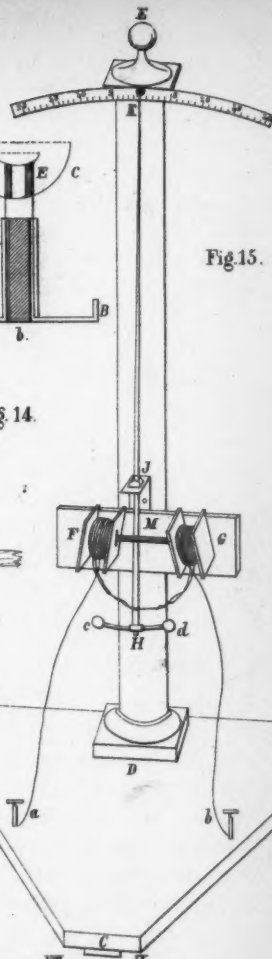


Fig. 14.

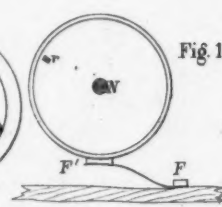


Fig. 11.

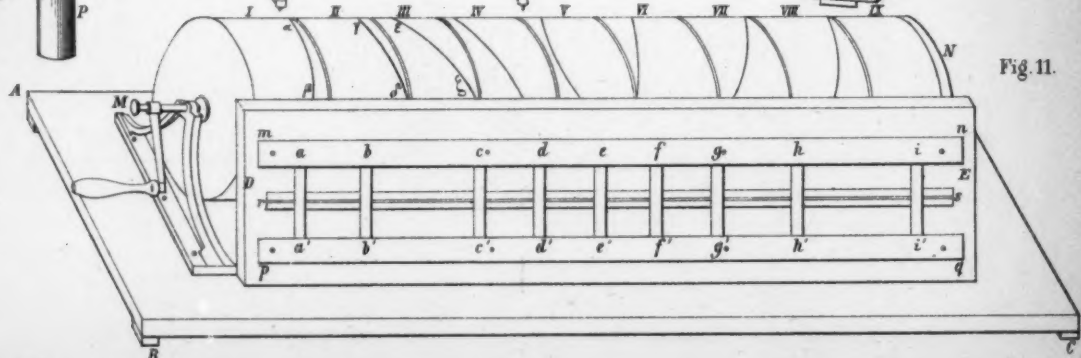


Fig. 1.

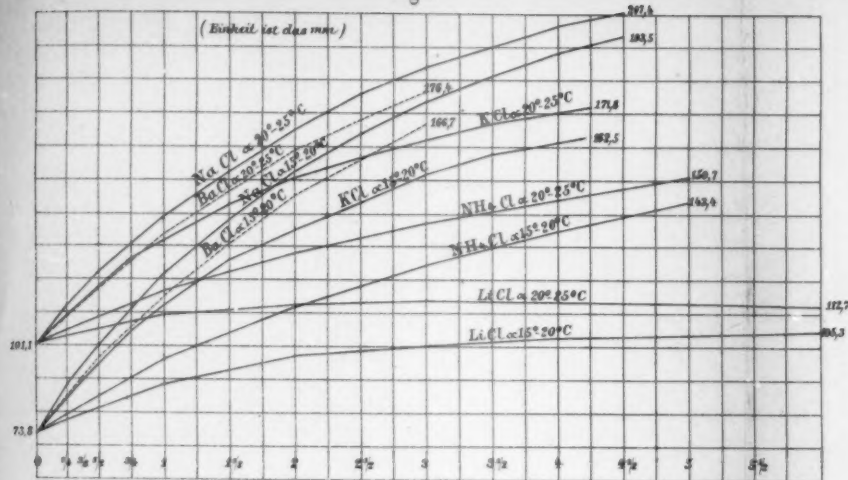


Fig. 2.

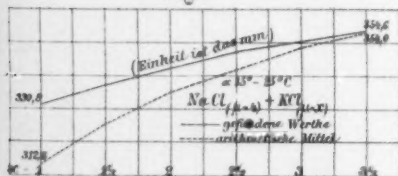


Fig. 3.

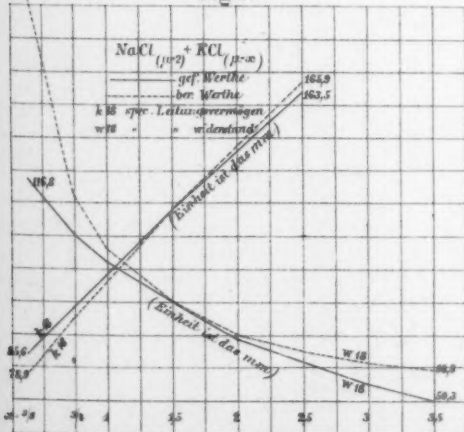


Fig. 4.

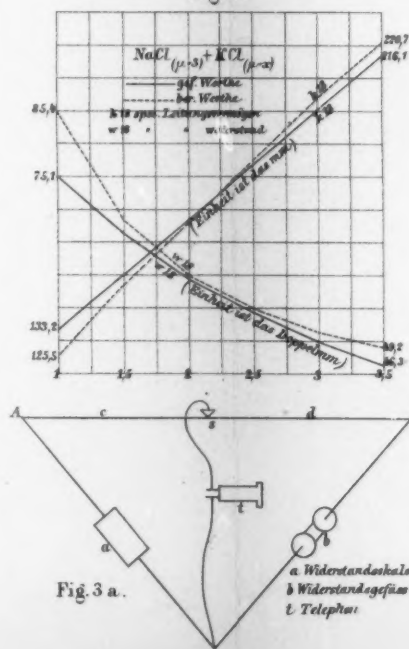


Fig. 6.

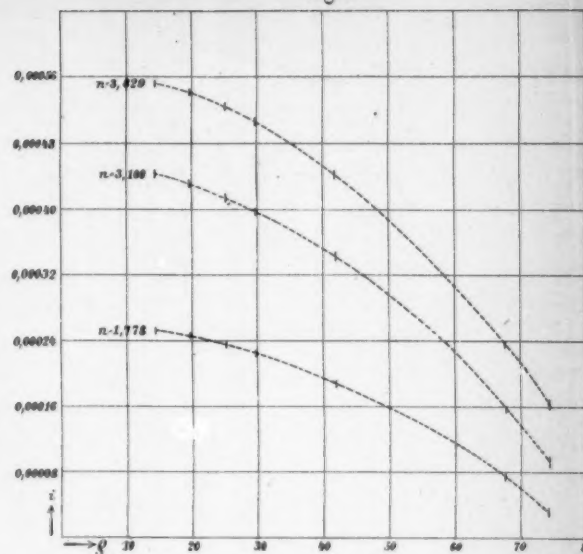
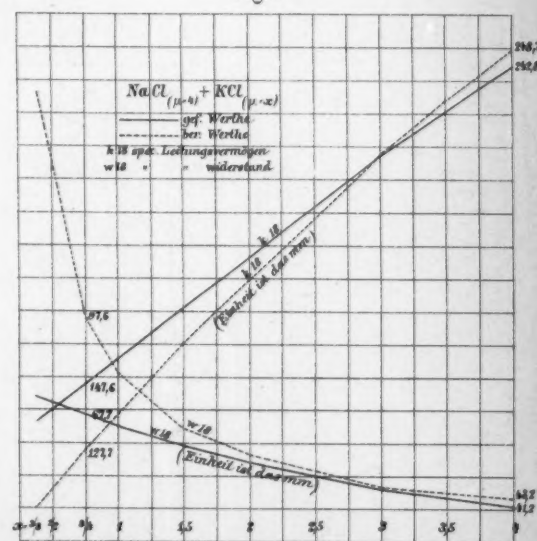
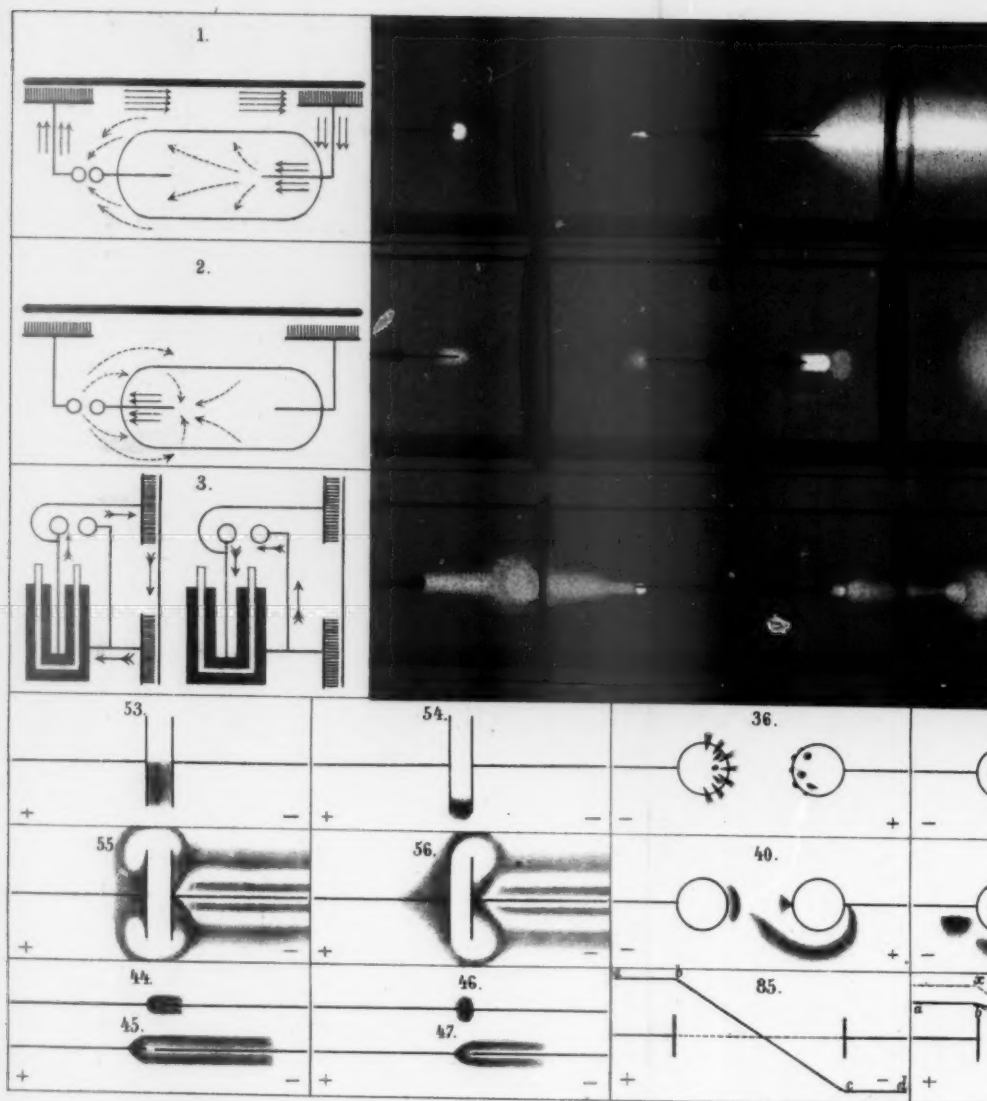
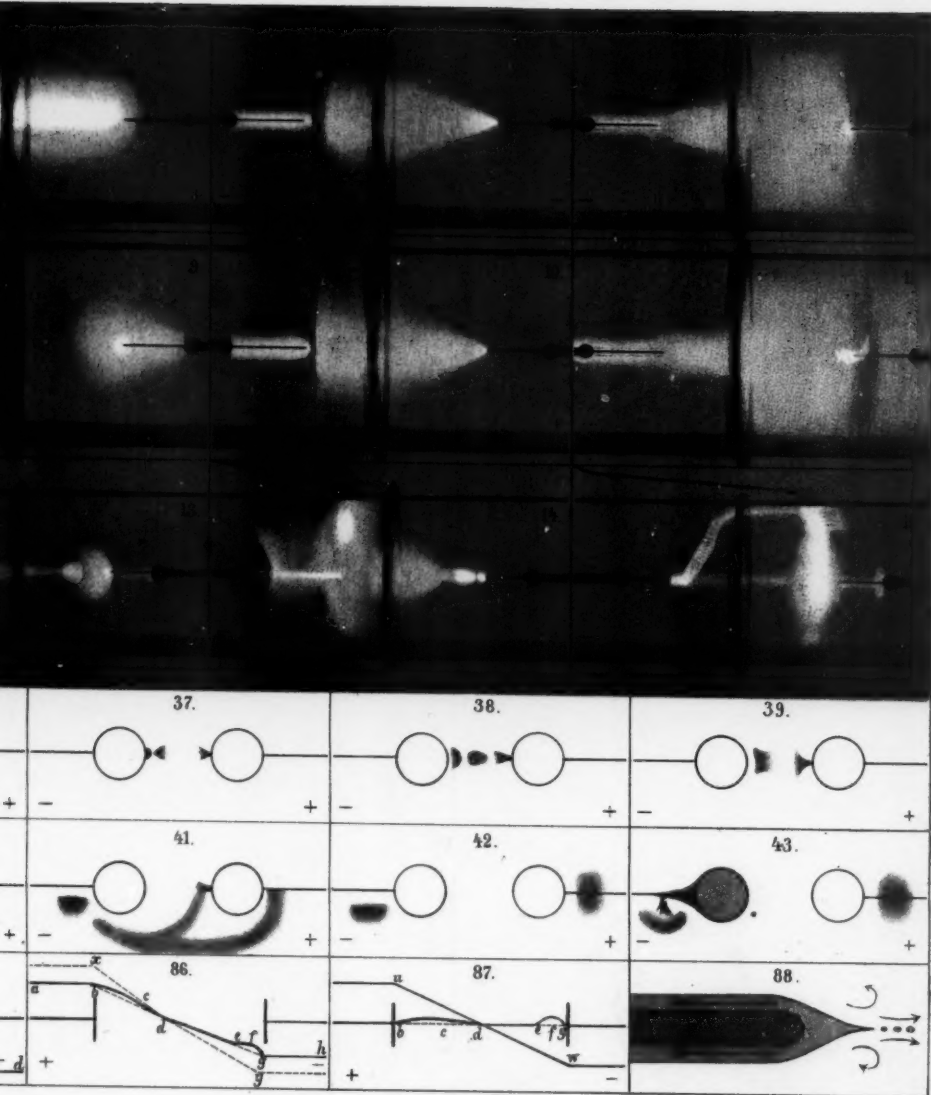
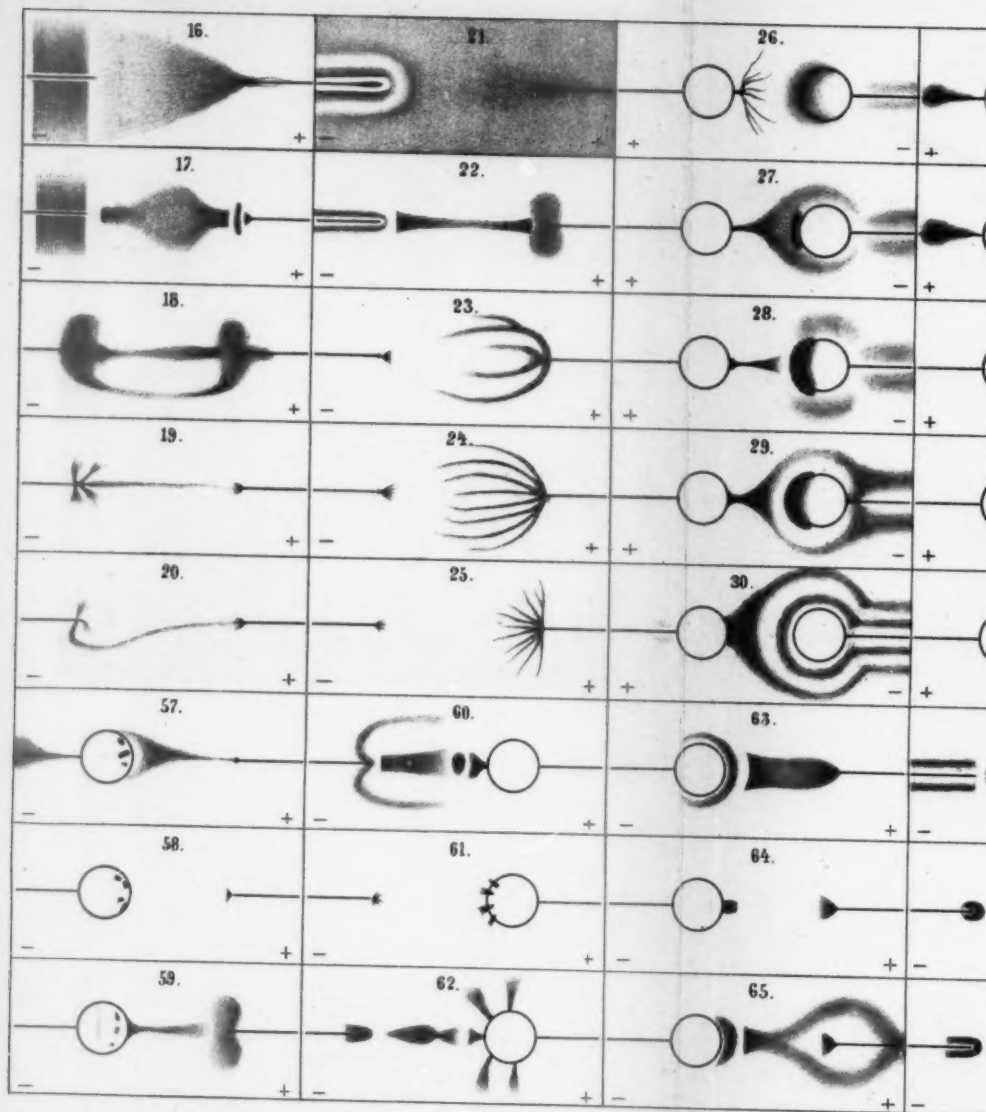


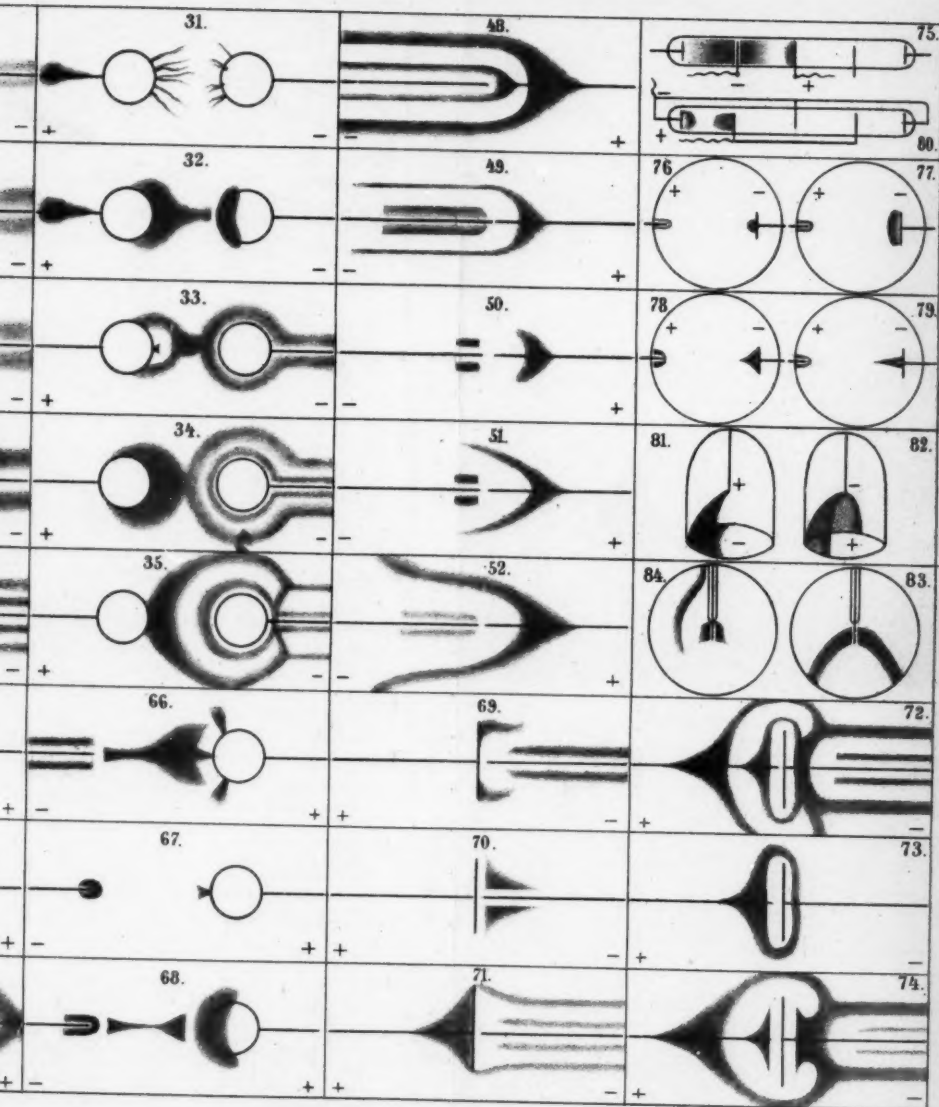
Fig. 5.













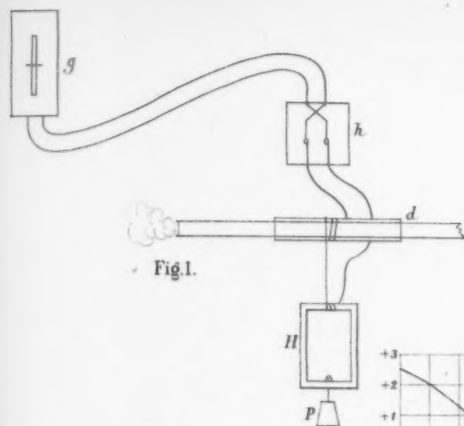


Fig. 1.

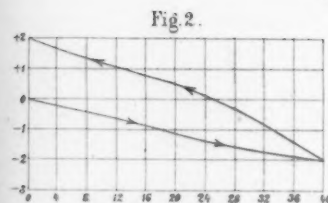


Fig. 2.

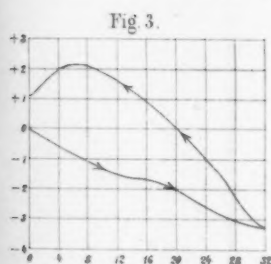


Fig. 3.

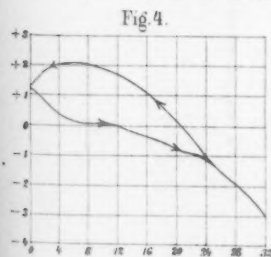


Fig. 4.

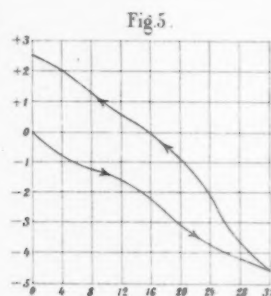


Fig. 5.

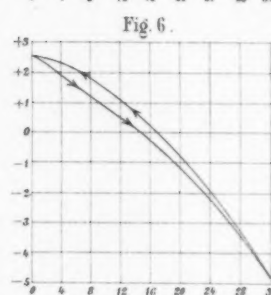


Fig. 6.

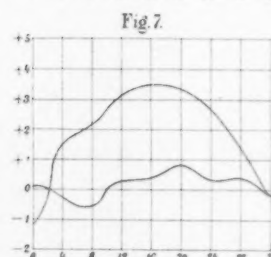


Fig. 7.

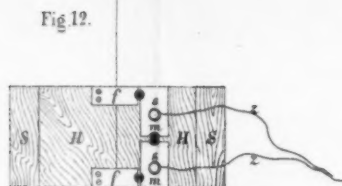


Fig. 12.



Fig. 13.

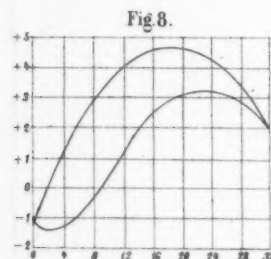


Fig. 8.

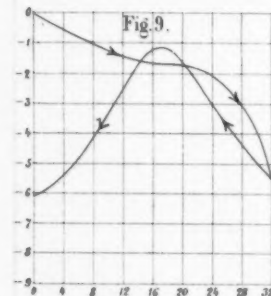


Fig. 9.

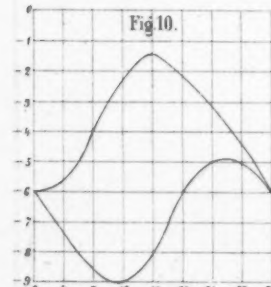


Fig. 10.

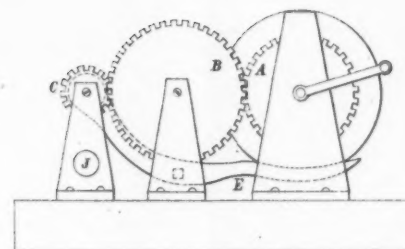


Fig. 14.

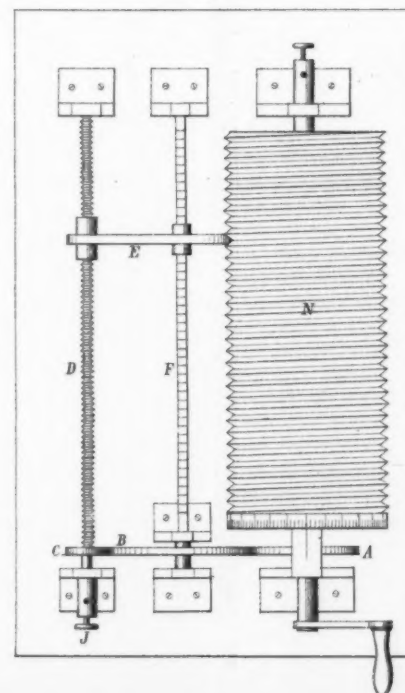


Fig. 15.

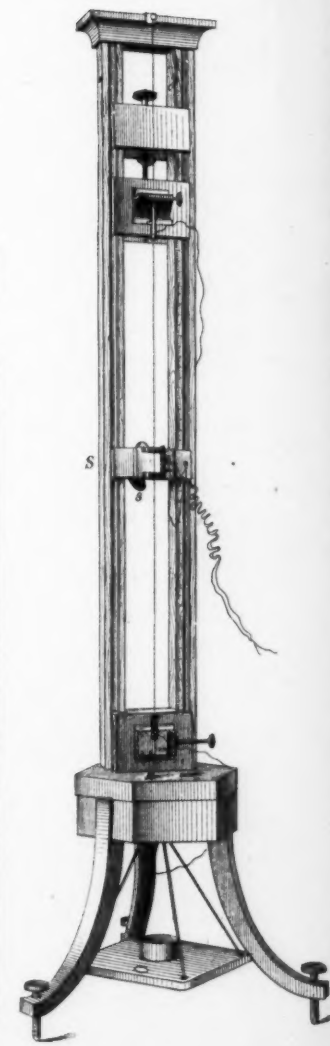


Fig. 11.

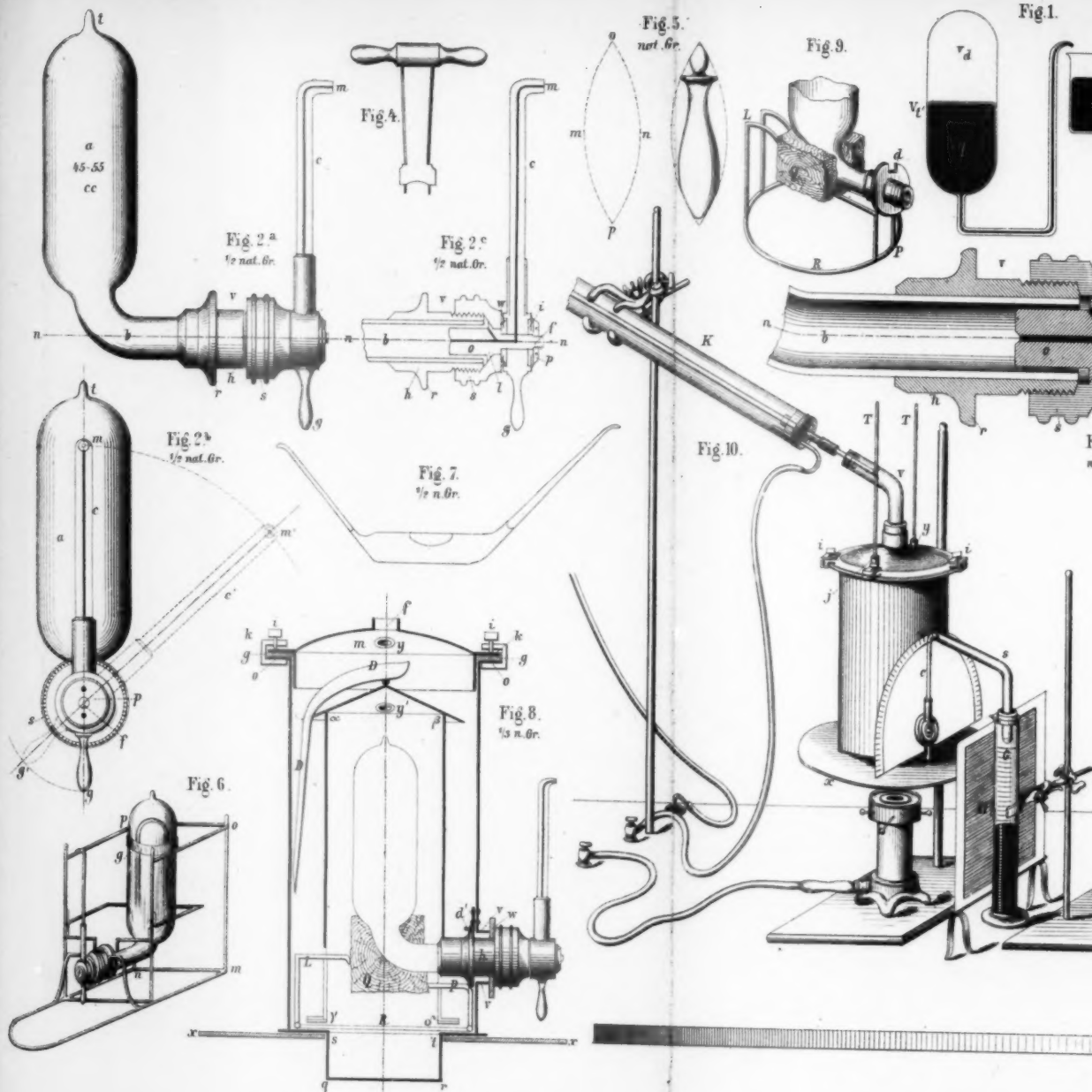


Fig.1.

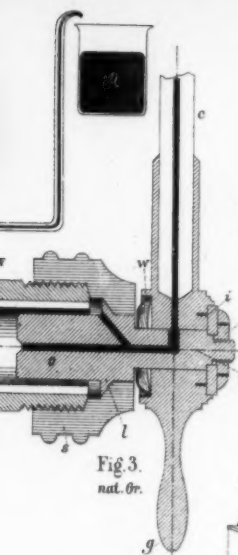


Fig. 3.  
nat. Gr.

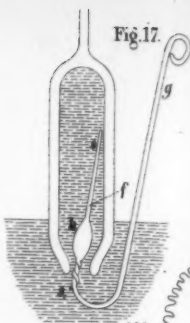
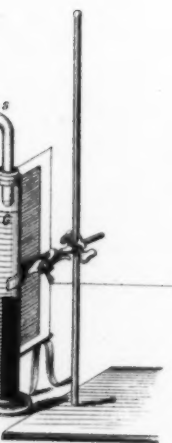


Fig. 17.

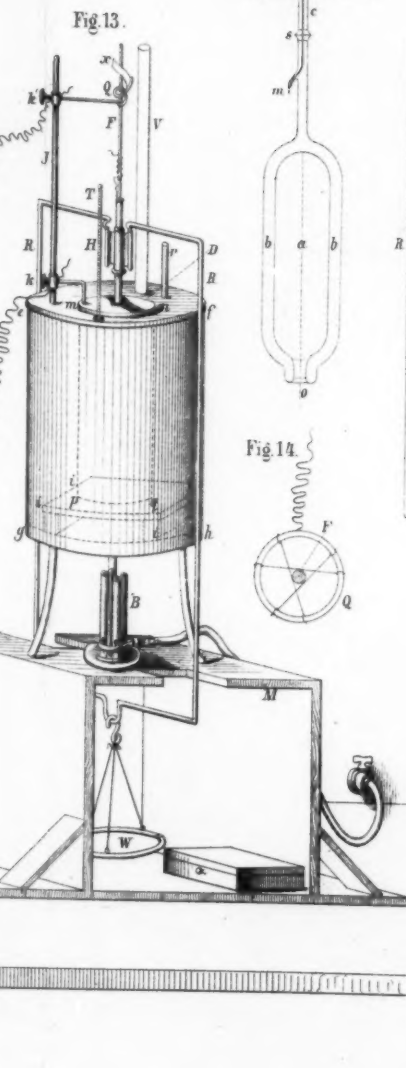


Fig. 13.

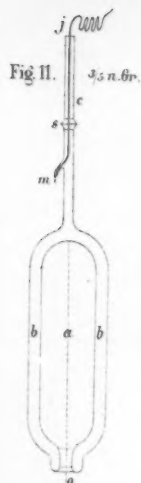


Fig. 11.  
 $\frac{3}{5}$  n. Gr.

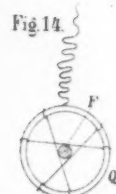


Fig. 14.

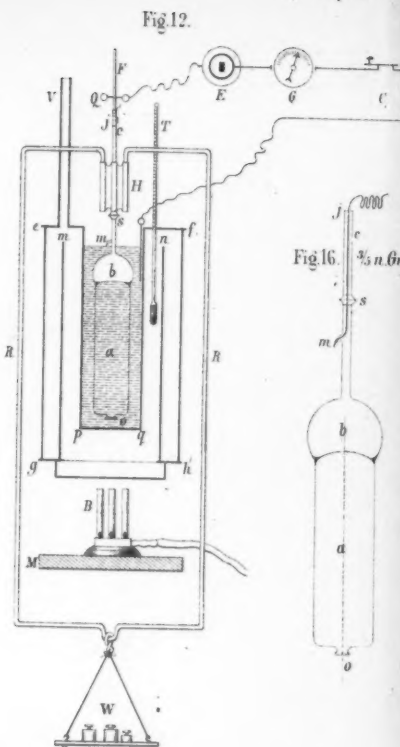


Fig. 12.

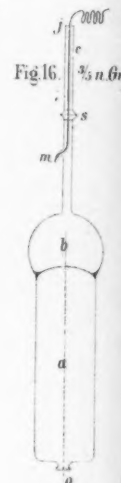


Fig. 16.  
 $\frac{3}{5}$  n. Gr.

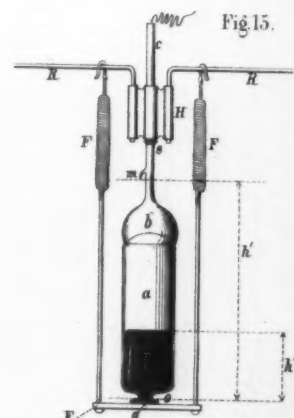
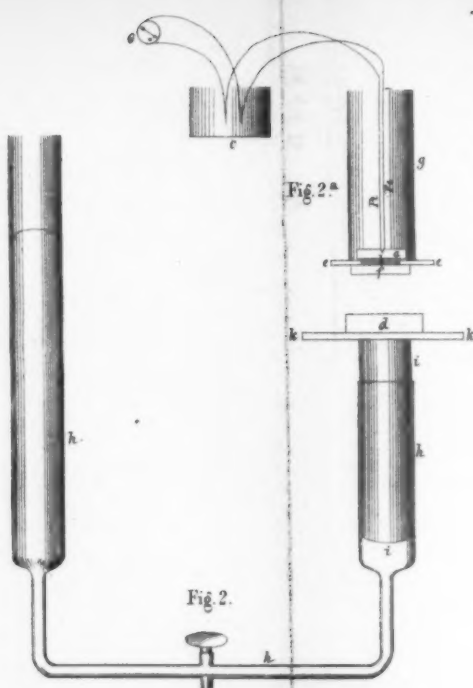
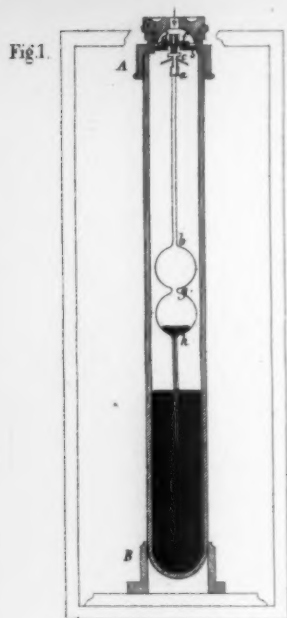
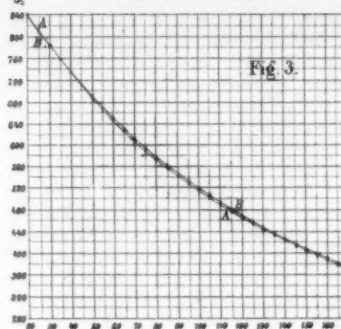


Fig. 15.

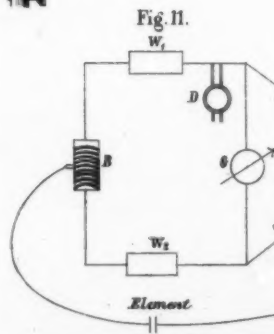
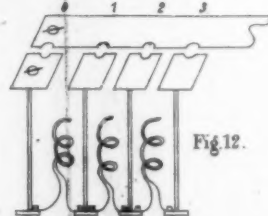
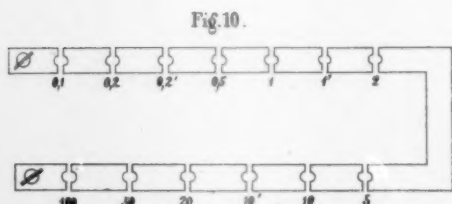
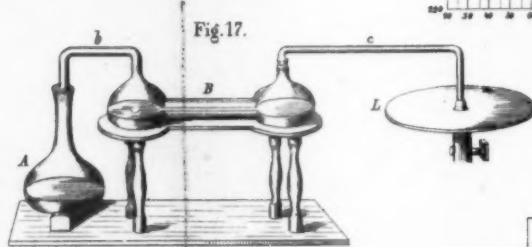
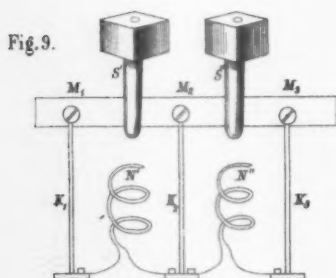
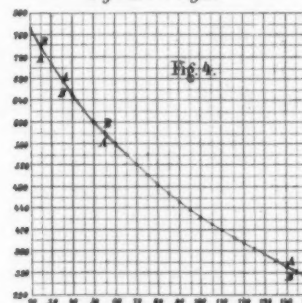


Skalenhöhe

Krystall von Brasilien.



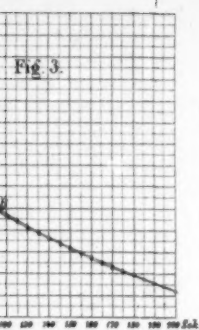
Krystall von Ceylon.



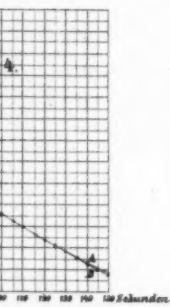
Röntgen Fig. 1-1<sup>a</sup>. Stenger Fig. 2-4. Blasius Fig. 5-8. Dorn Fig.

ation.

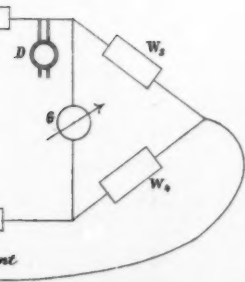
Fig. 3.



len.



11.



Dörn Fig. 9-12. Krebs Fig. 13-16. Lommel Fig. 17.

Fig. 5.

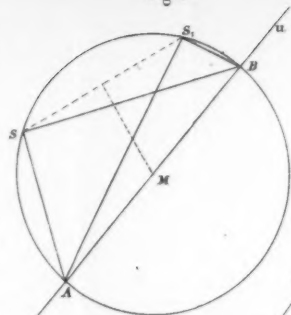


Fig. 8.

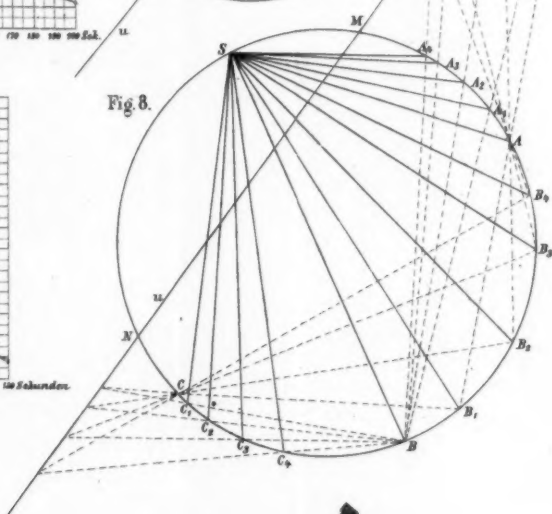


Fig. 7.

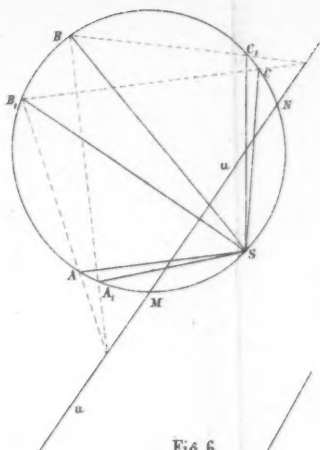


Fig. 6.

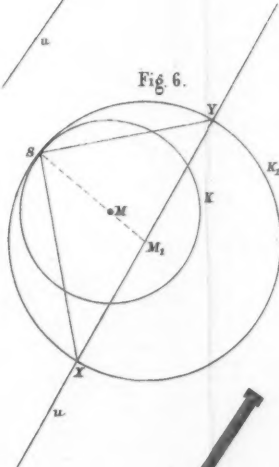


Fig. 15.



Fig. 16.



Fig. 2.

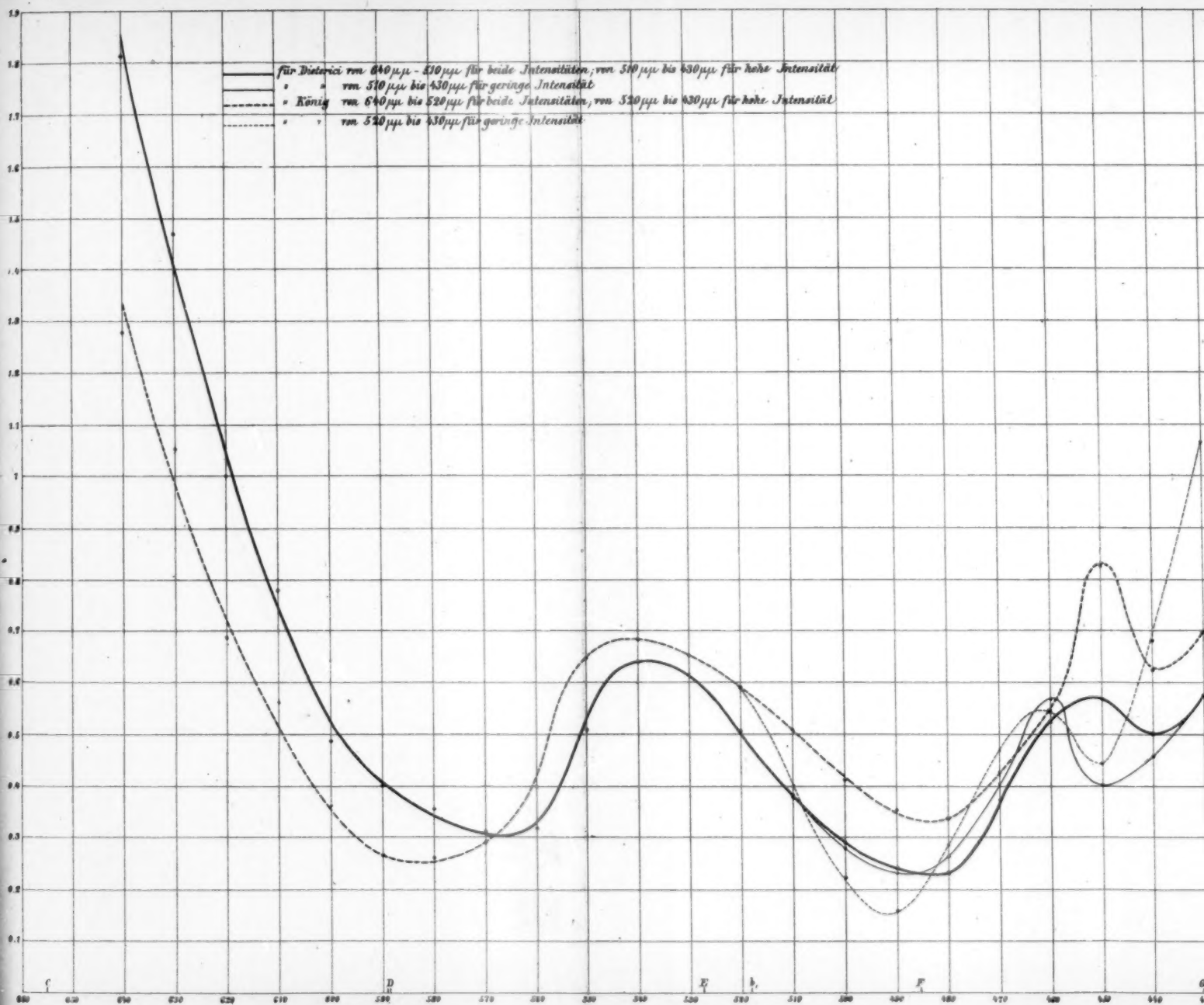
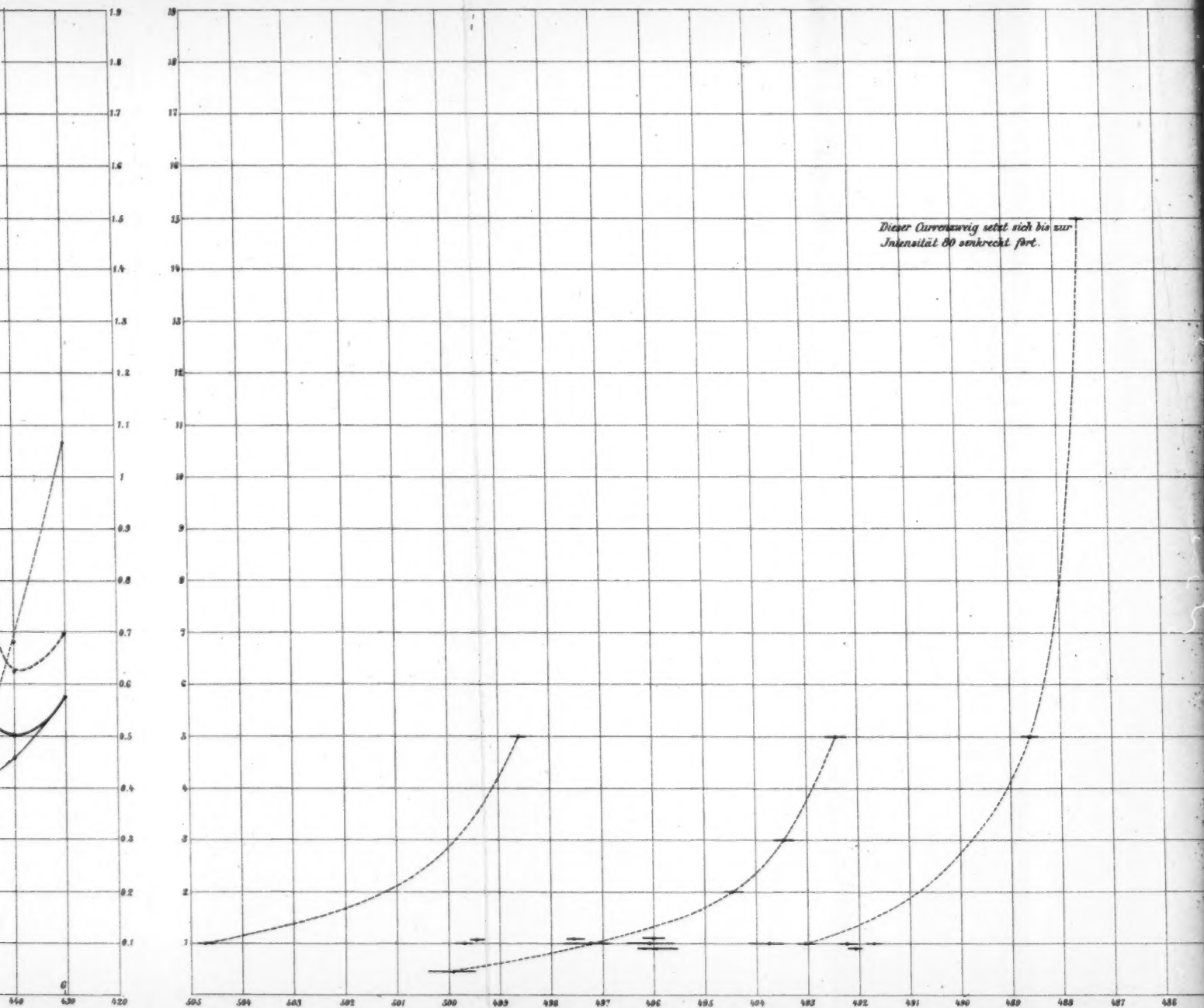




Fig 1.

Taf. VII



C. Dieterici Fig 2.

Lith. Anst. v. C. Kirst, Leipzig



J.E. Keeler, Del.